CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM ... OPERA VARIA. VOLUMEN PRIMUM [-SECUNDUM]: 1

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII,
Dum viveret Zelemii Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN PRIMUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

G. J. 'sGRAVESANDE

L. S.

ILlos de re litteraria bene mereri, semper persuasum habui, qui doctorum virorum scripta dispersa colligunt; & minoribus, seorsim perituris, in majori volumine collocatis posteritatem quasi donant.

Hac de causa cùm Bibliopolæ hujus Urbis, Jansonii vander Aa, *mihi declararent, se in mente habere* Hugenii *opus, olim* Parisiis *editum*, de Horologio Oscillatorio *typis mandare, & hac de re quid sentirem ego quærerent, Ipsis Auctor fui, ut non modo in proposito perseverarent, sed ut omnia ante edita ejusdem Auctoris opera minora huic adjungerent.*

In me libenter suscepi curam colligendi hæc, & disponendi; schedasque semel & altera vice a correctore examinatas, ipse attente relegi, & cum figuris contuli; scripta etiam quædam, in Diariis non sub Auctoris oculis edita, sæpe mendis variis purgavi.

Opera quæ hic exstant, in quatuor dispersi tomos; quæ Mechanicam Machinasque spectant tomo primo continentur: Geometrica secundo: Astronomica tertio: Miscellanea pauca quarto.

Tractatus varios Auctor separatim ediderat; scripta minora multa in Diariis dispersa dantur: inter hæc quædam spectant controversias quæ Auctori cum viris doctis intercedere, & quæ ad eandem controversiam pertinent, aliquando in variis regionibus publicata exstant, partim Gallicè conscripta, partim Latinè.

In edendis libris, separatim ab Auctore publici juris factis, exemplaria manu ipsius recognita, & in variis locis aucta, & emendata, secutus sum; quod etiam referri debet ad scripta pauca ex iis quæ in Diariis fuere tradita.

Exemplaria hæc accepi à Nob. D^{ni} Hugenio *Zelemii Toparchâ, qui patrui* Christiani *opera hæc cum*

cum cura ſervaverat, & qui libenter mihi hæc ea lege conceſſit, ut abſoluta editione in Bibliotheca publica Acad. Lugd. Bat. jungantur cum ejuſdem Auctoris manuſcriptis quæ ibi ſervantur.

*In Indice, ad calcem libri adjecto, monui ubi ſcripta ſingula antea edita fuere. Tractatus ſeparatos Latine Auctor conſcripſit, præter Inſtitutionem de Uſu Horologiorum *, quæ Belgico ſermone in lucem prodiit. Ex Gallicis Diariis excerpta ſcripta Gallico ſermone conſcripta dantur. Illorum autem quæ inter opera Acad. Reg. Paris. Artium & Scient. cum publico communicata fuere, quædam Gallica ſunt reliqua Latina, nempe;* * pag. 193.

De potentiis funeſve trahentibus *: * pag. 287.

Conſtructio loci ad Hyperbolam *: * pag. 485.

De maximis & minimis *: * pag. 490.

De inveniendis tangentibus *. * pag. 498.

Ut omnia Latino ſermone exhiberentur, quæ Belgicè, aut Gallicè, edita fuere, Latinè reddidit Clariſſ. Hermanni Ooſterdyk Schacht, *Med. Profeſſoris in hac Acad. Celeberrimi, Filius Digniſſimus* Johannes Ooſterdyk Schacht, *qui ad ſtudia ſubtiliora na-*

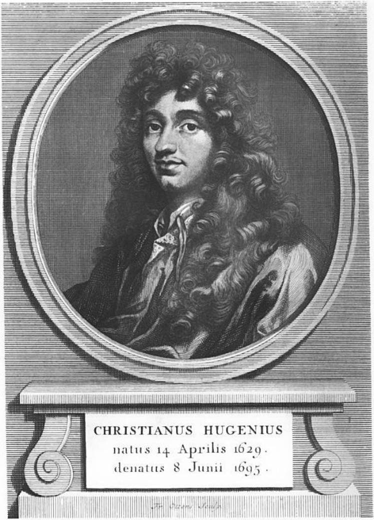
tus, à naturâ acceptum, adhuc dum juvenis, diligentiâ pulcherrime excoluit ingenium.

Si collectioni huic volumen operum posthumorum Hugenii, *& tractatus duos de* Lumine *&* Gravitate, *addas, omnia B. L. habebis* Hugenii *opera.*

Hæc autem quæ hic deficiunt, eâdem formâ cum hisce, brevi edituri sunt Bibliopolæ Amstelodamenses Waesbergii.

Dabam Lugd. Bat. 3°. Id. Mart. MDCCXXIV.

H U-



LUGD. BAT. Apud JANSSONIOS VAN DER AA. Bibliopolas.

HUGENII VITA.

CHristianus Hugenius, natus est Hagæ Comitum in Hollandia, 14. April. 1629. Patrem habuit Constantinum Hugenium, Equitem, Toparcham Zulichemii, Zelhemi, & in Monikenlandt, qui tribus Auriacis Principibus a secretis & consiliis fuit. Mater erat Susanna van Baerle.

In studiis Mathematicis integram consumsit vitam, non tantum speculationibus deditus, sed harum disciplinarum subtilissima ad vitæ usum referens. Ab ipsa infantia huic studio applicavit animum, vix natus annos novem, ipso Patre duce, in Musicis, Arithmeticis, Geographicis, miros, & vix credibiles, progressus fecit, Latinis & Græcis litteris interim animum applicans.

Anno ætatis decimo tertio quàm ingenium studio Mechanices esset aptum, quod tanta deinde hominum utilitate excoluit, in examinandis machinis, hasque, quantum infanti liceret, imitando, demonstravit.

Anno 1644. studium Matheseos aggressus est, Mathematicumque Belgam Stampioen præceptorem habuit.

Sequenti anno Academiam petiit quæ Leidæ est apud Batavos. Ibi Vinnium jus civile explicantem audivit, & magistro Schotenio studium

** Ma-

Matheſeos continuavit, ingeniique ad hæc ſtudia nati varia tunc temporis dedit ſpecimina, brevique famam inter Mathematicos, annos ſuperantem, acquiſivit.

Studium autem Juridicum Bredæ proſecutus eſt annis 1646, 1647, 1648, occaſione ſcholæ illuſtris, tunc temporis ibi erectæ, & curæ Patris ipſius pro parte commiſſæ.

Hagam anno ſequenti redux, Henricum Comitem Naſſavium ſecutus, Holſatiam, & Daniam, inviſit. Vehementi tenebatur deſiderio in Sueciam uſque iter ſuum producendi, Carteſium ut videret, quod ipſi non licuit, brevi finitâ Comitis legatione.

Anno 1651. Tractatum edidit *de quadratura Hyperboles, Ellipſis, & Circuli, ex dato portionum gravitatis centro* *.

* Vide pag. 309.

Ut librum hunc perluſtrent Lectores rogo Mathematicos, & videant an non merito, in ipſa juventute, inter ſummos Mathematicos relatus fuerit Hugenius.

Eodem anno & ſequentibus varia de refractionibus & Dioptrica conſcripſit, quæ in operibus poſthumis edita exſtant.

Anno 1655. Galliam petiit, & Andegavi Doctor Juris renunciatus eſt.

Eodem anno cum fratre Conſtantino vitris formandis, quæ Teleſcopiis majoribus inſervirent ope-

operam dedit. Teleſcopium decem pedum conſtruxit quod, ut ipſe perſuaſum habebat, omnia illius temporis ſuperabat. Hujus auxilio comitem Saturni detexit. Omnes hujus Planetæ ſatellites tunc temporis Aſtronomos latebant, & niſi multis annis ſerius, reliquos quatuor, inter quos unus Hugeniano à Saturno remotior, detexit Caſinus.

Non ſtatim ſibi novum ſidus cognitum dari cum Aſtronomis communicavit, ad quoſdam tamen inventum, hiſce verbis & litteris involutum, miſit.

Admovere oculis diſtantia ſidera noſtris VVVVVVV CCCRRHNBQX.

Quæ verba cum adjectis litteris ipſo vitro inſcripſit.

Explicatio eſt *Saturno Luna ſua circumducitur diebus ſexdecim horis quatuor.* Exactius tamen in ſequentibus hujus Lunæ periodum determinavit*.

* Vide pag. 551.

Tranſpoſitione litterarum Ænigma explicatur.

Per multos annos vitris formandis quibus nova in cœlis detegeret ſedulam cum fratre impendit operam, præcipuè ab anno 1681 ad annum 1687, artemque hanc perfectiorem reddidere; multa ex acuratè admodum elaboratis vitris majora conſtruxere Teleſcopia. Inter vi-

tra hæc duo præ ceteris antecellunt, magnitudine Telescopiorum quibus inservire debent, &, si Auctori nostri fidem habeamus, excellentiâ*; majus destinatum erat Telescopio ducentorum & decem pedum, alterum Telescopio centum & septuaginta. Hæc duo nunc possidet Anglia. Multa alia Telescopiis, centum pedes excedentibus, ut & minoribus, inservientia apud heredes adhuc-dum supersunt.

* Vide pag. 698.

Anno 1656 tractatum conscripsit de ratiociniis in ludo aleæ*, editus hic fuit ad calcem Exercitationum Mathematicarum Schotenii. Methodum in hoc tractatu demonstravit ipsam sortem computationi Mathematicæ subjiciendi, primusque publici juris fecit principia artis post illum ad vix sperandam perfectionem prolatæ.

* Vide pag. 723.

Anno 1657 primus mortalium tempus exactissime mensuravit, pendula dum Horologiis applicavit. Ante illum Astronomi adhibitis pendulis tempus quidem mensurabant, sed ad exigua intervalla, cum pendula talia homine indigerent qui curaret ut in motu perseverarent. Ipse autem ope Horologiorum perpetuum quasi pendulis motum communicavit, ponderibus enim Horologia agitabantur, quæ, non mutata actione in Horologia, elevari poterant.

Persuasum habebat talia Horologia & mari usu venire posse, & nil præter hæc in nave requiri ad determinandas longitudines. No-

Notum enim est, utilis hujus longitudinum problematis diu desideratam, & forte desiderandam, solutionem, ab exacta temporis mensura pendere.

Non tamen satis erat Horologiorum motus legibus fixis adstrinxisse, sed ut ipse notabat, motum æquabilem servare, navim jactantibus austris, hoc opus, hic labor erat; difficultatem tamen superari posse semper speravit, multa tentavit, & ad mortem fere usque nova, ut ad scopum perveniret, molitus est; sed licet ad hunc pertingere non potuerit, quo ingenio, qua perspicacitate, rem prosecutus est, qui horum operum tomum primum perleget dijudicabit; non omnia tamen tentamina publici juris facta fuere.

Anno 1659. *Systema Saturnium* * edidit, in quo veram causam ansarum hujus planetæ tradidit, quam ante illum nemo ne suspicione quidem attingere potuerat, hancque invictis firmavit argumentis.

* Vide pag. 527.

Sequenti anno altera vice Galliam petiit, unde in Angliam anno 1661. profectus est. Ibi artem suam laborandi vitra demonstravit, cum inter omnes constaret, Hugenii Telescopia, longitudinem viginti quatuor pedum tunc temporis non excedentia, ceteris omnibus perfectiora esse.

Novum tunc temporis inventum erat Antlia pneumatica, hujus, ab ipso ex Anglia reduce

 per-

perfectioris redditæ, auxilio varia instituit experimenta *.

* Vide pag. 765.

Eodem anno regulas de collisione corporum Elasticorum detexit, quas easdem postea etiam detexere in Anglia viri celeberrimi Wallisius & Wrennius, cum quo tamen ultimo contentionem, super hoc invento, habuit Hugenius noster.

Anno 1663. Lutetiam Parisiorum iterum petiit, & cum Patre in Angliam iter suscepit, ubi Sociorum numero Regiæ societatis Londiniensis adscriptus est.

Per paucos tantum ibi stetit menses & in Galliam rediit.

Anno 1664 Hagam redux de invento applicationis pendulorum ad Horologia ipsi cum invidioso quodam lis fuit.

Hoc tempore, in Gallia, studiorum se Mæcenatem demonstrabat vir Illustris Colbertus; cujus consilia de studiis promovendis libenter audiebat Galliarum Rex. Undique viri scientiâ illustres in Galliam vocabantur, inter quos Hugenius.

Hic anno 1665, nomine Regis, Colberti litteris, ut Lutetiam peteret, ibique domicilium eligeret, promisso largo annuo stipendio, oblatâque habitatione in ædificio servandis Regiis bibliothecis destinato, invitatus est.

Ibi vixit ab anno 1666. ad annum 1681. Durante hoc tempore pulcherrima, subtilissimaque mul-

multa, in Mathematicis detexit, variaque ex iis operibus conscripsit, quæ nunc in unum corpus collecta, quid in variis Matheseos partibus præstiterit, sub oculis ponunt.

Præter ipsius jam memorata inventa præclara inter alia duo insigni usu eminent. Libellam Telescopio munitam ita construxit, ut ipsi præ ceteris fides haberi possit *. Inventum aliud spectat temporis mensuram, Horologiis portatilibus filum, chalybeum, spirale, elasticum, adaptavit *; quo nunc nullum portatile Horologium destituitur, quo etiam sublato, accuratissimè constructa omnem motus æquabilitatem amittunt.

* Vide pag. 254.

* Vide pag. 253.

Nimium verò studiis Mathematicis deditus, menti gratum Corpus non potuit sustinere laborem. Bis Hollandiam hac de causa petiit, annis 1670, & 1675, iterumque recuperatâ sanitate in Galliam rediit, sed tandem valetudini ut consuleret illi in perpetuum dixit vale anno 1681, omnibusque Regis beneficiis nuncium remisit.

Reliquum vitæ cursum iisdem occupatus studiis absolvit.

Anno 1682. construi curavit Automaton Planetarium in quo planetarum motus in plano pulcherrime æmulatus est.

Machina hæc in operibus posthumis delineata, & accuratissimè descripta, datur. Exstat adhucdum apud hæredes.

An-

Anno 1689. Angliam tertia vice invisit.

Sequenti anno tractatus duos, alterum de *Lumine*, de *Gravitate* alterum edidit.

Cosmotheoros tempore mortis sub prælo sudabat, editio tamen inchoata tantum erat.

Vitam finivit Hagæ Comitum octavo Junii 1695.

Scripta omnia legato dedit Bibliothecæ Academiæ Ordinum Hollandiæ quæ est Lugd. Bat. virosque duos, insignes Mathematicos, Burcherum de Volder, in eâdem Acad. Philosophiæ & Math. Professorem celebrem, & Bernhardum Fullenium, in Academiâ Frisiâ Franequeræ Professorem, rogavit ut ex scriptis eligerent, quæ prælo committi possent, cui petitioni volumen debemus operum posthumorum, anno 1700. editorum.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA MECHANICA.

TOMUS PRIMUS.

Tomi primi contenta.

CHRISTIANI
HUGENII A ZULICHEM,

CONST. F.

HOROLOGIUM.

ILLUSTRISSIMIS AC POTENTISSIMIS

HOLLANDIAE
Et
WESTFRISIAE
ORDINIBUS
Dominis suis,

CHRISTIANUS HUGENIUS à ZULICHEM

Felicitatem omnem.

PRoditum est memoriæ primum Romæ solare horologium fuisse, quod è capto Siciliæ oppido quodam, annis post urbem conditam CCCCLXXVII, *cum cætera præda deportatum sit, locoque publico dedicatum. Cui non planè ad Latii clima descripto, eoque nec lineas horis congruentes exhibenti, quum necessitate tamen & meliorum penuria undecentum annis Pop. Romanus paruisset, Censorem tandem Q. Marcium Philippum diligentius ordinatum juxta posuisse, idque munus inter censoria opera gratissime acceptum. Mihi, Proceres Amplissimi, rem haud absimilem nec minore publico bono hodie agitanti, ut qui non in una modo urbe, sed omnium ubivis horologiorum instabilem motum correxerim, similem quoque ab universis gratiam expectandam censuissem atque à civibus suis Q. Marcius reportavit, si, quemadmodum res eventusque iidem ex intervallo redire solent, ita priscus candor & ingenuitas in terris aliquando reduces cernerentur. Verum hæ cum jam diu apud majorem hominum partem desitæ sint virtutes,*

CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM,

CONST. F.

HOROLOGIUM.

TEmporis dimetiendi rationem novam, quam exeunte Anno 1656. excogitavimus, paucisque deinde mensibus in patria divulgare instituimus, etsi dubitandum non erat, propter egregiam utilitatem, brevi longe lateque manaturam, quippe pluribus jam distractis, ac dimissis quaquaversum novi operis exemplaribus; nos tamen haud inviti consiliis eorum obtemperamus, qui ut scripto comprehensam in lucem ederemus, autores fuere. cum ut illos demereamur, ad quos, ob locorum intervalla, tardius fortasse perventura erat: tum ut male feriatorum hominum audaciæ obviam eamus, ne, quod solenne ipsis est, alienis insidientur inventis, ac per summam injuriam pro suis vénditent. Quanquam hos, si fuerit opus, & dati Privilegii tempus refellere possit, quod à Celsissimis Fœderatarum Provinciarum Ordinibus die 16. Junii Anno 1657. impetratum est; & testes præterea non pauci, quos de oblato nobis recens invento subinde certiores fecimus. Occasionem ei præbuisse Astronomorum pendula, facile quivis conjiciet, qui non nescierit aliquot jam retro annis hæc usurpari illis cœpta.

Nimirum fallentibus clepsydris automatisque quibuslibet; quæ inter observandum adhibere consueverant, tandem, docente primum Viro sagacissimo Galileo Galilei, hunc modum inierunt, ut è catenula tenui pondus appensum manu impellerent, cujus vibrationibus singulis dinumeratis, totidem colligerentur æqualia temporis momenta. Hac methodo Observationes Eclipsium scrupulosius quam antea peregere, Solisque item diametrum, & Stellarum distantias dimensi sunt non infeliciter. Sed præterquam quod deficiebat necessario pendulorum motus, nisi adstantis opera identidem juvaretur, tædiosus insuper labor evadebat, omnes eorum itus reditusque numerantibus; cui fane integris noctibus mirabili patientia nonnullos invigilasse, ipsis prodentibus, constat. Nos autem æquabilissimum hocce genus motus cernentes, ac veluti unicum in rerum natura datum, quod ad Mechanicam constructionem posset traduci, quæsivimus quo pacto hoc ipsum brevissime assequi liceret, atque ita remedium invenire gemino quod retulimus incommodo. Ac multa fabricæ varietate animo perpensa, hanc denique, quam deinceps traditiri sumus, ut cæteris planiorem facilioremque selegimus. Qua percepta & in publicum porro privatumque usum, sicut jam fieri cœpit, conversa, ad universos quidem hic fructus redundabit, quod horologiorum, cum inter se, tum cum Sole ipso, quantus nunquam antehac, imo quantus pene optari posset, consensus animadvertetur. Astronomi vero id consequentur, ut nulla posthac agitandorum perpendiculorum molestia, numerandive solicitudine, & illa omnia exequantur, quorum paulo ante meminimus, & alia illis subtiliora, ipsam puta dierum de meridie in meridiem inæqualitatem, scrutentur; quam qui negare audent, ratione hactenus magis quam certa experientia refutati sunt. Ut jam de Longitudinum, quam vocant, scientia dicere omittam: quæ si unquam extitura est, desideratumque tantopere usum cursui navigantium præbitura, non aliter, quam vectis per mare exquisitissimis atque omni errore vacuis horologiis, id obtineri posse, multi nobiscum existimant. Verum

rum hæc res vel ipsi mihi, vel aliis quandoque curæ erit. Nunc automaton nostrum & figura oculis subjiciam, & figuram verbis quam potero dilucide explicabo.

Præcipuam operis partem binæ laminæ continent oblongæ atque inter se æquales, A B, C D; quibus rotarum axes utrinque inserti sunt. Ex laminæ lateribus tantum hic sunt conspicuæ: columellas autem quatuor, quibus versus angulos connexæ sunt, de industria exprimere neglexi, ut ne reliquis officerent. Prima rota seu tympanum dentatum est E, cujus axi orbiculus quoque F affixus est. Huic circumjectus funis cum appenso pondere Δ, eo quem postea dicemus modo. Ponderis itaque vi tympanum E vertitur. Hoc movet proximum tympanum H. hoc rotam L, cujus dentes ad instar serræ dentium formati sunt. Hujus prope axem erectus stat axis M N, cum affixis lamellis sive auriculis binis, quarum alteri occurrunt superiores rotæ L dentes, alteri inferiores, idque perpetua vicissitudine, ita ut non in gyrum axis hic circumagatur, sed reciproco motu, nunc in hanc, nunc in illam partem libretur, dum interim rota L in orbem vertitur. Quem motum pluribus exponere supersedeo, quod in vulgaribus passim horologiis reperiatur. à quibus equidem hucusque nostrum hoc non discrepat; at plurimum in his quæ sequuntur. Axi enim N M infigitur O tympanum, cujus dentibus aptantur dentes rotæ P, ejus generis quas coronarias vocant artifices nostri. Nec vero toto ambitu dentata ut sit necesse est, sed parte superiori duntaxat. quippe tympanum O, haud aliter atque axis N M cui cohæret, reciprocam librationem habet, unde & rotam P simili motu agitat. Cumque major sit hujus diameter quam tympani O, sequitur ut minori etiam circuitus parte rota quam tympanum dictum gyretur. quod quo pertineat alibi indicabimus. Porro ejusdem rotæ P axis trans laminam C D aliquantum extenditur, habetque conjunctam clavulam Q R, inferius itidem inflexam & terebratam ad R, ita ut per foramen hoc laxiusculum virgula ænea I T libere transmeet. Hæc vero virgula superius ad S suspensa est filo S I, ex inferiori parte pondus T sustinens,

TAB. I.

nens, quod cochleæ subjectæ conversione sursum propellitur cum opus est, vel ulterius descendit.

Quibus expositis ut motus ratio, totiusque adeo inventi percipiatur (nam quæ præterea in Schemate notata apparent, postea exequemur) advertendum est in primis, quod si perpendiculum S I T per foramen R trajectum non esset, neque omnino adesset, tunc quidem clavula Q R concitato motu ultro citroque jactaretur, vi ponderis Δ, omnes rotas automati agitantis. Transmissa autem virgula I T, cum appenso pondere T per foramen R, impeditur eo dictus clavulæ motus, totumque horologium quiescit, donec pondus T semel impulsum principium agitationis nanciscatur. Quo facto, pendulum quidem S I T oscillatorio motu fertur juxta planum laminæ C D. clavula vero Q R, momentum sentiens ponderis Δ, ultro obsequitur penduli motui, ita ut paulisper etiam vibrationibus hunc singulis adjuvet. Atque hoc modo perennis efficitur penduli agitatio, quæ nisi illud horologio conjunctum foret, brevi deficeret vergeretque ad quietem. Ad singulos autem recursus penduli, percipientur ictus totidem ex appulsu dentium rotæ L ad lamellas M, N. Et hæc quidem de motu automati nostri, quæ præcipue explicationem requirebant, quoniam in eo summa totius inventi vertitur.

In schemate porro tertia lamina est Y Z, prioribus parallela, & à lamina A B spatio distans. quo in spatio conspicitur tympanum dentatum V, communem cum rota E axem habens. Huic congruunt dentes rotæ X, quæ media sui parte conjunctum habet tubulum cavum Γ ultra laminam Y Z prominentem, impositumque gerentem horologii indicem primarium Λ. Ipsi vero Γ tubulo alius itidem cavus introrsus constitutus est, laminæque Y Z consertus, axis nimirum quo rota X volvatur, & per quem simul transmittatur axis rotæ H, cui impositus est index alius Σ longior indice Λ. Is secunda scrupula demonstrat. Primorum vero scrupulorum seu minutorum index prioribus illis utrisque multo brevior Ψ, extremo axi D V, ultra laminam Y Z producto, affixus est. Et hic quidem indiculus, laminæ, Y Z proximus fertur, parvo

parvo in circello singula prima scrupula distinguens. Hoc verò superior index horarum Λ convertitur: & supra hunc denique Σ index, quem dixi, secundorum. Hæc autem, uti & tympanorum omnium dispositio ac dentium numerus, cum multimodis variari possint, nos hunc unum in exemplum proponere satis habuimus, eumque experientia comprobatum. Itaque & dentium multitudinem in singulis tympanis designabimus, eam quæ huic formæ optime convenire visa est. In circumferentia rotarum singularum E H septuageni bini sunt, seni in tympanis G & K. rota L viginti quinque habet, tympanum O decem. rota P viginti, vel tantum partem horum aliquam, quia, ut dixi, totam dentibus insecari nihil opus est. Penduli longitudo S I T pedis Rhenolandici, qui ad Romanum veterem proxime accedit, dextantem circiter æquat, & cuique vibrationi simplici impendit semiscrupulum secundum. ad quam mensuram observationibus ad solem vel ad aliud hujus generis horologium comparatis non difficile perducitur. Ea longitudo rotis ita ordinatis convenit: & exquisitam motus æqualitatem, quæque etiam Astronomicis usibus sufficiat, præstare valet. Quod si tamen concinnitate operis insuper habita, quadruplo majus pendulum adhibeatur, vel ultra etiam producatur, rotis interim majoribus quoque adsumptis, haud dubiè lentioribus oscillationibus tutius etiam fidemus. Et jam in magnis publicis Horologiis, egregio successu, perpendicula ejusmodi prælonga usurpari vidimus, alibi duodecim, alibi vicenûm pedum, cum appensa sphæra 25 vel 30 librarum. Cæterum revertendo ad ea quæ hic posita fuere, apparet quidem, rota E semel circumacta, duodecies converti rotam H. centies vero quadragies & quater eam quæ sequitur L. Quæ cum dentes 25 habeat, 3600 vicibus alternatim impellit lamellas M. N. ac totidem recursus duplices facit pendulum S I T. Cumque 3600 scrupula secunda, horâ unâ contineantur; hinc horæ spatio rota E semel convertetur. Quamobrem & circulus indici Ψ subjectus in 60 partes dividitur, quæ prima scrupula significent. Rota vero H quia

 duo-

duodecies in hora, hoc est, semel spatio 5 scrupulorum primorum versatur, unaque index Σ, ideo circulum huic indici suppositum in 5 partes primum dispescimus, & harum deinde singulas in 60 minores, quæ secunda scrupula denotent. Denique index Λ in suo circulo duodecim horas distinguere debet; ac proinde, ut harum tempore semel circumeat, tympano V sex dentes tribuuntur, rotæ X septuageni bini.

Nunc qua ratione pondera Δ, Ξ, horologio appendantur docebimus. Hæc enim novo artificio ita ordinavimus, ut cum sursum retrahitur pondus primarium Δ, non propterea cesset aut ullatenus impediatur horologii cursus. Quod in hac inventione apprime necessarium erat, ne particula temporis aliqua quotidie subduceretur, neve penduli motus interea dum pondus attollitur languesceret. Paratur itaque funis continuus atque in se rediens, extremitatibus apte inter se connexis. Is primo orbiculum F amplexus, aculeis ferreis asperum, quo melius funis inhæreat, parte altera trochleæ, cui pondus primarium Δ alligatum est, circumvolvitur. Hinc ascendens super orbiculo Ω transit, ac rursus descendens sustinet trochleam alteram cum appenso minori pondere Ξ; unde denuo ad F redit. Orbiculus Ω (quem demonstrandi gratia hic inter laminas A B, Y Z, suspendimus, nam alioqui commodius thecæ quæ toti horologio circumdatur affigi solet) circumferentiam versus denticulos habet, ut in rota L, serratos, ac desuper prementem elaterem Θ, quo fit ut in alteram tantummodo partem volvi possit, attracto nimirum fune Π, ac pondere propterea Δ ascendente: Nam contrarium motum elater dentibus occurrens prohibet. Crenam autem secundum circumferentiam dicti orbiculi ita cavari oportet, ut funem immissum nonnihil coarctet constringatque, quo minus possit immoto orbiculo delabi; quem in finem etiam pondus Ξ adhibetur. His sic constitutis, semper Δ dimidia sui gravitate incumbet funi Φ, motumque horologio continuabit etiam dum attracto fune Π in altum attollitur. Et hactenus qui-

quidem quæ ad constructionem automati pertinent declaravimus.

Reliquum est, ut, quantum idem iis omnibus, quæ ad hanc diem in usu fuere, antecellat, perspicuum faciamus. Satis constat plurimas in his erroris & inæqualitatis causas esse. Nam & in disponendis rite elimandisque tympanis vel levissimum peccatum, continuo motus inconstantia notabilis consequitur. Tum vero & siccato atque evanescente oleo, quod axibus addi solet, tardius horæ procedunt. atque ut hæc absint, varias tamen, anni tempestatum & aëris, mutationes horologia sentiunt, imo præsentiunt nonnunquam: & frigore quidem plerunque pigriora comperiuntur, æstu plus æquo properant. Penduli vero cum sit ea vis ac proprietas, ut necessario eodem semper tenore feratur, neque ab eo nisi mutata longitudine unquam declinet; apparet sane omnia illa quæ diximus incommoda invento nostro penitus nos sustulisse, adeo ut nisi tale quod interveniat impedimentum, quo horologii motus omnis sistatur, nulla jam cursus ejus retardatio aut inæqualitas timenda sit. At enimvero non nemini duplicem hic dubitandi causam oboriri posse scio. Primum, quod differre à pendulo libero nostrum hoc videatur, quippe ad singulas vibrationes vim quandam ac nixum clavulæ Q R sentiens. Deinde quod, etiamsi penduli simplicis proprietates retineat, perque omnia æmuletur, hujus tamen ipsius geminæ inæqualitates à nonnullis, qui subtiliter hæc perquisiverunt, animadversæ sint. Hic illud quod de clavulæ impressione dicitur verum esse non diffitemur. Sed levissimam utique hanc esse novimus ratione gravitatis T, quæ sic temperatur, ut tantum non deficiat penduli agitatio, sed quam minimâ, & eâdem tamen latitudine perseveret. Proinde nihilo concitatior aut minus æquabilis hic ipsius motus evadit, quam si clavulæ prorsus obnoxius non esset, pendulumque simplex S I T, ut adhuc fieri consuevit, manu impelleretur. Et hoc quidem ex-

perientia optime comprobat. Penduli vero ipsius, quas adnotant, binas inæqualitates, alii autem contra pernegant, earum alteram admittimus, sed vix quicquam horologio nostro officientem, alteram plane nullam esse adseverare non dubitamus. Illud itaque vere asserunt, non prorsus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac angustiores vibrationes transire, sed his illas paulo plus insumere, quod facili experimento demonstrari potest. Nam si pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo, alterum parumper dimoveantur, simul dimissa, non diu in partes easdem una ferri cernentur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus. Verum huic inæqualitati nostrum, uti dixi, horologium minus obnoxium est, eo quod omnes oscillationes æquali spatio à perpendiculo excurrant. Nec tamen in totum expers remansit, si minutissima quæque, sicut hac in re fieri necesse est, consectari velimus. Contingit siquidem vel aëris intemperie, vel operis vitio aliquo, ut non semper pari vi agitetur clavula Q R, unde & oscillationes penduli (licet exiguo discrimine) crescere ac rursus imminui necesse est. Cumque ampliores recursus arctioribus, sicut modo dicebam, plus temporis impendant; idcirco nonnulla hinc in horologii motu inæqualitas existit. Et huic quidem, utut contemptibilis videri possit, remedium etiam adhibere solebamus, quamdiu ita constructa erant horologia, ut majuscula esset penduli agitatio. Postmodum vero, ne remedio opus esset, effecimus, adhibito tympano O rotaque P: quibus hoc consequimur, ut quamlibet angustæ sint penduli vibrationes, neque eo secius axis M N, quantum necesse est, reciproco motu convertatur. Nam cum tympani O diametro dupla vel tripla ponatur diameter rotæ P, sequitur ut hujus exigua licet oscillatione, illud tamen satis magnam circuitus partem absolvat. Sic igitur oscillationibus universis exilioribus redditis, etiamsi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, singularum tamen tempora, experientia teste, nullo memorabili discrimine differunt. Qua ex re & hoc contingit, ut aucto

vel

vel ad duplum pondere Δ, non propterea penduli motus acceleretur, aut horologii cursus alteretur, quod in omnibus aliis hactenus usitatis secus accidit. Alteram penduli inæqualitatem, Vir Astronomiæ studiis clarus, Gothofr. Wendelinus, primus & solus, ut opinor, prodidit; expertum sese scribens, ejusdem penduli velociores esse oscillationes hyemali tempore quam æstivo idque notabili differentia. Sed quoniam in eo examine arenaria tantum horologia, vulgariaque automata sese adhibuisse fatetur, cum scioteri-cis, fortasse non nimia cura descriptis; multi, quam recte se haberet hæc ipsius observatio, dubitarunt. Mihi certe nihil ejusmodi licuit animadvertere. Quin contra, & minoribus horologiis, quibus semipedale est pendulum, & majoribus, in quibus 24 fere pedes æquat, eandem perpetuo longitudinem, brumæ tempore ac æstate media, convenire expertus sum. Quæ longitudo saltem septima sui parte per hyemem productior esse deberet, si Wendelini vera foret opinio.

Asserta igitur & hac in parte automati nostri motus æquabilitate & constantia, finem jam descriptioni imponemus; multa quæ his addi præterea possent, artificum industriæ relinquentes, qui rationem inventi hujus edocti, non difficile reperient quo pacto illud varii generis horologiis, atque iis etiam quæ pridem ad veterem formam fabricata sunt, applicari queat. Nos quidem apud eum, cujus opera primum in his fabricandis usi sumus, talia quoque confecta vidimus, quæ non pondere, sed elateris vi moverentur. In quibus, cum antehac pyramide illa æquatoria, chordaque huic circumvoluta opus esset, quorum ope adæquarentur primi ac postremi elateris impetus; nunc iis omissis, ipsi tympano, cui elater inclusus est, dentes adduntur. Nam licet hoc modo non æque in fine ac principio vigeat penduli motus, non tamen eo lentiores sub finem oscillationes efficiuntur, uti superius fuit demonstratum. Elater vero ea parte, qua ad centrum convolutus est, intenditur, atque ita cavetur ne quo temporis momento cursus horologii suf-

flaminetur. Mitto quod & sonitu horas edentia automata hujusmodi machinatus est, ita ut uno eodemque, sive pondere, sive elatere, pars utraque, tam quæ ad hoc comparata est, quam quæ indicem horologii versat, moveretur. Etenim hæc omnia ad inventum nostrum haud aliter spectant, quam quod occasionem iis atque opportunitatem præbuerit.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII

ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM.

SIVE

DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

Prima *Descriptionem* HOROLOGII OSCILLATORII continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide*.

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum*.

Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis*.

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga*.

LUDOVICO XIV,
FRANCIÆ ET NAVARRÆ
REGI INCLYTO.

RENATAM, Rex maxime, restitutamque hoc sæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique sui parte deperditam, ac veluti sepultam, instaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum vestigiis insistentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri subtilissimi, ut pauca jam posterorum industriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longissime prætervecti sint. In hac scientia, quam semper admiratus sum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris proposui investiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta

C pro-

logia nostra. Tuis auspiciis eadem nec pauca, Astronomiæ usibus dicata, visuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam insigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curasti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari soleo. Nec jam requiret quisquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem descriptionemque explicui, augusto Nomini tuo inscribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigisse didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio constaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuisque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi significatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiisque iis intento, quæ in illo rerum fastigio positum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum esse, ut ad hujusmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex augustissime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè prosunt; neque aliud magis curæ esse, quam ut nova incrementa sumant optimæ disciplinæ,

novisque illustrentur inventis. Hoc enim satis declarat eximia illa tua, ac singularis, tum in ipsis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immensæ, ac solito majores, bellorum impensæ quidquam imminuunt: non Galliæ tuæ fines circunscribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non solum sub imperio tuo viventes, sed & Orbis universus, quacunque beneficio tuo dignus est, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui verissimæ præclarissimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortasse etiam hæc literaria monumenta conducent; ut, si viguisse hoc tempore studia ista, artesque, posteris testari possint, simul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum esse. Lutetiæ Parisiorum; XXV. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.

HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.

Ad Christianum Hugenium Zulichemium, Constantini F.

FINITIMUM *tutela, simul jucunda voluptas,*
*Dilectæ Phœbo, Sceverinides * Oceaninæ;*
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes infestent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, fratrumque patrisque:*
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Sicelisin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatia commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Jam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Juverat, hærentesque vadis captare paguros.
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis. ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.

C 3 Ec-

* Sceverina, Pagus apud Batavos, mari adjacens.

Ecquid agat, rogitant blande: tum fausta precantur;
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet crastinus Eos,
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ
Si qua darent mihi signa. maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc usque Jovis clementia sudi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monstra profundo,
Fert radians æther, vultus formasque natantum.
Cancer ibi est, delphinque; est grandi corpore cetus.
Ad Boream pisces, & contemplere sub Austro
Pisces; nuper ubi numero crevisse feruntur.
Sunt urna, fluviusque, & aplustris comta carina
Illic. quin operis simulamina plurima vestri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hædi parvæque sues, materque capella.
Et fuse sparso quæ candet semita lacte.
Vestibulum servant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
Plaustraque; quique auriga suis excussus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præsepe suum juxta stabulantur aselli.
Illic virgo, manum Cereali inlustris arista,
Et, transmutatus faciem, Pan ipse renidet;
Daphnin amans vestrum, secretæ rupis in umbra,
Uranie velut edocuit: me singula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poscitis) ordine pandam.
Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti posuere. jacet sine fluctibus æquor;
Factaque sunt terris, sunt facta silentia ponto.
Mox interfatur: Quod prosperet; ab Jove magno
Ordiar: ordiri consuerunt ab Jove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi nascitur ordo,

Noctur-

Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
Inde Jovis magni cunas, veterisque celebrat
Saturni jussum crudele, dolumque Cybelles;
Ortaque Dictæis Corybantia sacra latebris:
Ut puero nutrix sit olentis lecta mariti
Uxor; & ipsa recens hædos enixa gemellos;
Queis comitata polum modo lucida stella frequentet;
Quæ prius Oleniis balavit bestia campis;
Sub pedibusque terat formosi limen Olympi.
Tantus amor Jovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem,
In duo secta vias, oculis manifesta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo; Deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovisset:
Quæ, simul experrecta, simul conterrita, surgens
Uvidulas tenero mammas subtraxerit ori,
Indignata. pavimentum tabulataque cæli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio discrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum lassaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit sarcina collo;
Atque tot ærumnas quem post, manesque subactos,
Ipse suis ornet jam portio magna triumphis;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus; apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lerneæque audacem Hydræ succurrere Cancrum;
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Junonis iniquæ.
Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam;

Et

Et transmittendi pavidam nimis æquoris Hellen:
In thalamos sit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec silet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere; sublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardescere: sed, quæ
Sunt Hyades Grajis, Suculas dixisse Latinos;
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, sua plaustra sequente, Bubulco;
Quando bovem prisco vocitabant more trionem,
Quod tereret duro proscissam vomere terram.
Hanc adeo sortem miserans, suspiria ducit;
Buceriumque genus questu compellat inani;
Ah pecus infelix, armentum! sæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec vestro vocitaret nomine stellas.
Tunc neque sidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu spicum gerit; Icariotis
Sive sit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monstravit cæde peremtum;
Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
Astra minor socium majorem repperit inter:
Seu magis Astræi sit sanguine creta, perenne
De genitore suo quæ nomen contulit astris:
Sive sit antiquæ Themidis justissima proles,
Aversata jugo vos aspectare gravari,
Tempora dum, pulsis melioribus, ærea surgunt:
Sive sit alma Ceres; horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari; nil pejor linquit inausum
Ferrea dum soboles, ipsorum inimica Deorum:
Quos, quasi de terra (nam Dii coluistis & illam)
Sit pepulisse parum, tentavit pellere cælo.
Tum detestatur suffultos angue Gigantas;

Por-

Porphyriona, statu terrentem cuncta minaci;
Rhæcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
Enceladumque; manusque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhöea dirum,
Ausos invasisse Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cælum complesse tumultu,
Undique divulsas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggestis.
Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia sancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæsierint, addit; dispertitosque pavore:
Donec apud late stagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan sumserit Ægocerotis;
Ambigueque sono Superos animarit ad arma,
Anguipedesque metu dare terga coëgerit omnes:
Cœlo donandos Asinos auxisse timorem
Congerie vocum, perterricrepoque fragore:
Illa cælicolis nam tempestate fuisse
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in asellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrsis armatos, tectos colocynthide parma.
Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Assyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ post numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Pisces
Lumina, signiferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fusa medius secernat Aquarius Urna;
Deucalioneos neque non ediderit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verset;
Sive sit is Cecrops, peplo præsignis Athenæ;
Pastor Aristæus seu plena alvearia gestet,
Quæ subter volitetis apes examine denso.
Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Persea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mæstam Cassiopeiam;
Insertumque polo vastum Pistricis hiatum:

D *Quem*

Quem Phaëthonteus longo ſinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Auſtro:
Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
Intuitos nova ſquammigerum ſimulacra micare:
Sollertes Batavos, imo ſeu gurgite piſcem
Venari ſit opus, vel in alto ſidera cælo.
Tum canit, ut Daphnis ſacra ſub rupe docentem
Viderit Uranien: argutas carmina ſilvas,
Et repetita cavos ediſcere carmina montes:
Ut Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum; & Babylonia turba;
Dein quos Graja tulit, quos aut Nilotica tellus,
Itala quos, ac pulchra ſuo cum Cæſare Roma;
Poſt Arabum de ſtirpe viri & regnator Iberus;
Ac tandem quos conſultos Germania miſit
Aſtrorum cælique, ſuæ qui ſidera terræ;
Inferior nullis ut item neque Gallia deſit;
Gallia magnanimi Regis ſplendore ſuperba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conſcia Latmia ſaxa:
Utque Canon juveni radium donarit, utrimque
Multo inſignem auro, & pellucidulis cryſtallis;
Per quas quod ſpectes, prope fiat; & augmina ſumat:
Dixerit &: Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; ſed Etruſci quo decus Arni
Eſt Antenorea ſenior Tyrrhenus in urbe
Regna Jovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
Lunaï montes; vultus tibi, Phoſphore, ternos;
Quove ſatellitio ſubluſtri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa ſuperne.
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi ſervatus ſollertior uſus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe fruſtra olim nobis optabile donum.

Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
Exsultant alacres Pueri: neque segnius ipse
Prosequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vane Saturni credita sidus
Oblongo tam diversa sub imagine disco
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & ambo nigror spatii disterminat intus;
Exiguo circum quos erret stellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque; quod his meritis permulsus, eundem
In sua magna Chronus sit adire sacraria passus:
Heic oculis lustrarit ut omnia; promserit atque
Inventum subtile secandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oscilla ex tenui suspendens mollia filo:
Id labyrintheos cursus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud sinat esse magistrum:
Cui neque quotidie tam certus spondeat auctor,
Oceano quantum Titan altissimus exstet;
Ac quibus emergat, queis tunc simul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum sua brachia quassant,
Alternoque solum pede pulsant. at freta saltu
Librabant hilares sese super humida thynni.
Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquisse domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arrosor prodiisse cuniculus antris
Tempore narratur; narrent si vera puellæ
Littoreæ, quæ siccandis custodia passim
Retibus ad ventos expansis forte sedebant.
Pectore Nereides nudo, lasciva caterva,
Visa per incertam Lunam, visæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul sub luce maligna;
Tuque, cubans juxta stratas prope littora phocas,

Neptuninarum pecudum fidissime custos:
Neu quisquam ferae meminit decedere nocti.
Interea tenebrae densantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, caeli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile syrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipse;
Praesertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Haec Ancon: mihi visa tibi quae digna referri,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, cui sidera curae,*
Nec Phoebum ac Pimpleae fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC. LXV.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIUM OSCILLATORIUM,
SIVE
DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO
Demonstrationes Geometricæ.

ANNUS agitur sextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello * publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis spectantia, visum est ea singula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potissima ejus pars censeri possint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius de-

* Vide supra pag. 5.

 sti-

ſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam horologiis adhibuimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in iis eſſe præſidii. Hæc ea eſt linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre deſignat; à Geometris noſtri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas ſui proprietates diligenter expenſa; à nobis verò propter eam quam diximus menſurandi temporis facultatem, quam nihil tale ſuſpicantes, ac tantùm artis veſtigiis inſiſtentes, ineſſe ipſi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo poſt primam horologii editionem animadverſa fuit) nunc eandem, demonſtratione quàm potuimus accuratiſſima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonſtratione potiſſima pars hujus libri verſabitur. Ubi primùm neceſſe fuit novis nonnullis demonſtrationibus ſtabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de deſcenſu gravium doctrinam, cujus fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus, hæc ipſa quam invenimus cycloidis eſt proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum uſum aptari poſſet, nova curvarum linearum conſideratio adhibenda fuit, earum ſcilicet

quæ

quæ sui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter se longitudinis curvarum cum rectis nascitur, quam ulterius etiam quam præsens necessitas postulabat prosecutus sum, propter theoriæ, ut mihi visum est, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compositi naturam, cujus utilitatem in constructione horum automatôn demonstro, adjungenda fuit Centrorum Oscillationis contemplatio, à pluribus quidem, sed minus feliciter, hactenus tentata, in qua theoremata complura animadversione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, solidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipsa horologii mechanica constructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad usus astronomicos aptissima reperta est, ad cujus instar reliquæ omnes, mutatis quæ opus est, facile ordinari possint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi successu, quod fieri plerumque solet, quodque futurum prædixeram, ut plures sese ejus auctores esse cuperent, aut si non sibi ipsis, suæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent, iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic arbitror. Nec sanè aliud fere opponere iis necesse fuerit præterquam id unum, nempe ante annos sexdecim, cum nec dicto nec scripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta esset, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli simplicis usu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controversiam movebit) constructionem eorum propria meditatione me adinvenisse & perficiendam curasse. In sequenti anno, qui nempe hujus sæculi quinquagesimus octavus fuit, delinea-

neationem automati descriptionemque typis vulgasse; exemplaria, tum operis ipsius, tum libelli, quaquaversum dimisisse. Nam cum hæc ita omnibus nota sint, ut nec testimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus possent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis existimandum sit, qui septem post annis eandem constructionem, quasi à se suisve amicis profectam, libris suis vendiderunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, si tentasse eum, non vero perfecisse inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, investigaverim. Cum autem vel ab ipso Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuisse contendunt, horologiaque ejusmodi re ipsâ exhibita, nescio quomodo sibi creditum iri sperent, cum vix verisimile sit adeo utile inventum ignoratum manere potuisse annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod si deditâ operâ celatum fuisse dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio posse obtendi, qui sibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, nisi unà quoque ostendatur, id quod omnes latebat, mihi soli innotuisse. Et hæc quidem necessariæ defensionis causa dicenda fuere. Nunc ad ipsius automati constructionem pergamus.

HO-

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continens.

FIGURA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt A A, B B, semipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inseruntur. Prima atque infima est quæ notatur C, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque D affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas à forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitatur tympanum I simulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad instar serræ dentium incisi. Supra mediam rotam K transversus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema sustinent hinc inde gnomones N Q & P, seorsim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorsum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, simulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem esse diximus, inferiori sui parte gnomoni R innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus L M, qui subtili cuspide insertus gnomoni P, liberius ita movetur quam si ab ipsa lamina B B sustineretur simulque ultra eam promine-

TAB. II. Fig. I.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

mineret, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula S, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione nōn indiget.

Porro clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum est, amplectitur. Hæc vero virga supernè duplici filo suspensa est inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta descripsimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc suspendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum istarum curvatura pluribus postea agendum erit.

TAB. II. Fig. 2.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes postea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi V X motum sustentari, postquam semel manu incitatum fuerit; & simul perpendiculi statos recursus rotis universis, totique adeo horologio movendi legem normamque præscribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulsu acta, non tantum obsequitur trahenti perpendiculo, sed & singulis recursibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui sua sponte, vel verius occursu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rursus vero, quum ejusmodi sit natura penduli ut eodem semper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri possit; utique postquam flexu lamellarum, inter quas suspensum est, æqualitatem illam consequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etsi sæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; sed necessario singuli dentes ejus coguntur æqualibus transire temporibus. Hinc vero manifestum est, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles conversiones effici, cum omnia propor-

tio-

tionaliter moveantur. Quamobrem siquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, semperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela est Y Y, pollicis quarta parte distans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarii descripti sunt centro eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum divisionem habet, alter scrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ϵ continuatur trans laminam Y Y; atque ita insidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; sine illo tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad ϵ index imponitur, horæ spatio circuiturus atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam desinit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in laminâ Y foramine ad Z, ea divisiones, cuspide in summo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori (*fig.* 3.) clarius perspicitur, exteriorem horologii formam referente.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est, & commodè in schemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit; sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem PEDEM HORARIUM in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam K: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pinnulæ L L, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus respondent totidem itus reditusque penduli V X. ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore semel circumit rota C, cumque ea simul index ad E impositus, qui scrupula prima demonstrat. Et quoniam eodem temporis spatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio suo dentium sex, ad quem numerum duodecuplus est numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H sexaginta conversiones respondere ostenderimus singulis conversionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, sexagies in singulas horas circumferetur, hoc est, semel unius scrupuli primi tempore, ideoque partes sexagesimæ orbiculi λ

secun-

secunda scrupula transitu suo ostendent: atque ita omnia rectè se habere manifestum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre est, plumbeum totum, vel ænea superficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate sed & figurâ insuper prospiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occursu aëris impedimentum sentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* schemate horologii minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior visa est.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

TAB. II. Fig. 1.

Porro eodem schemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, suspendendi ratio expressa est, quam, incognitam prius, investigare nobis necesse fuit, ne interim dum sursum retrahitur pondus istud, cessaret vel impediretur aliquatenus horologii cursus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in se rediens, extremitatibus apte inter se connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in schemate majori notatus est D, amplectitur; inde descendens, altera sui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appensum est, subit. Hinc super orbiculum *d* ascendit, extrinsecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque insuper serratis dentibus ita est aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi possit. Ab hoc orbiculo descendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum sufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo descendat. Namque à trochlea *f* rursus ad ipsum orbiculum D, unde descenderat, funis revertitur. Quibus ita se habentibus, manifestum est semper pondus *b* dimidia sui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem cessare cum manu funem *e* trahente ascendere cogitur; adeoque horologii motum nusquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non potest, sed quo minor conservando motui suffecerit, eo melius ac-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

curatiusque fabrefactum automaton arguet. In nostris, quæ optima hactenus habemus, ad sex libras redactum est, posita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capsam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oscillationibus peragendis necesse est. Ipsum vero horologium, ad hominis altitudinem suspensum, horis 30 moveri persevérat.

Superest nunc forma lamellarum describenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præstandum vel præcipua est opera. Absque his enim Penduli simplicis oscillationes (etsi nonnullis aliter visum est) non erunt æque diuturnæ, sed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque seorsim suspendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, simulque è manu dimittantur; non diu utrumque simul in partes easdem ferri videbitur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri possunt, certâ scientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus descensus per totum circuli quadrantem est ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam resistentiæ aëris ea diversitas imputanda sit, ut quidam voluere, sed ex ipsa motus natura circulique proprietate nascatur. Quod alio quoque argumento concludi possit ex ipsa Penduli isochroni constructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forsan in nostris horologiis hisce, ubi eadem semper est oscillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod sane ita esset si latitudo omnium

um planè eadem constanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna satis conflatur, idque ita esse reipsa atque experimentis evincitur. Etsi enim eadem semper sit ponderis vis, rotæ sibi proximæ respectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non semper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evanescente aut sordescente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oscillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in universum, sed his maxime omnium remedio opus sit, quo reciprocationum Penduli latiorum angustiorumque tempora æqualia evadant.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium istud, in primis Penduli longitudinem statuisse oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendiculorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive unciæ novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Penduli longitudo quæratur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis scimus 3600 recursus in horas singulas numerari: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Penduli quæsiti, proportione 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{44}{81}$.

Posita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis proposito, inde Cycloïs linea, quæ curvaturam laminarum T datura est, hoc modo describetur.

Super tabula plana affigatur regula A B, semidigiti crassitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, diametrum

TAB. III. Fig. 1.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

metrum vero baseos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; sitque F G H E fasciola, seu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta sit, partim extenuatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa sit ferrea cuspis D I, pauxillum ultra basin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte respondeat.

His ita se habentibus, si cylindrus secundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G crassitudine intercedente, eâque semper quantum potest extensâ, describet cuspis I in subjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti basis. Quod si jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipsam, & in superficie adversa similem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate secundum lineas istas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interstitium aptari oportet, inter quas perpendiculum suspenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum usum portiones exiguæ arcuum K M, K I; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non potest.

TAB. III. Fig. 2.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides K M, K I, alio schemate hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum M P I, iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensæ sphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quæ proprietas insignis, nescio an alii præter hanc lineæ data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat. Hæc autem quæ dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur.

Li-

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui A F sumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur singulæ C N, G O in recta C G; duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant singulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, singulæ E R, I S in recta E I; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti L M æquales fiant singulæ F T, K V in linea extrema F K. Jam si curvæ describantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet.

DESCRIPTIO HOROLOGII. TAB. III. Fig. 3.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus A F subtenduntur, æqualis ponatur X Z, totius vero arcus subtensæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Y, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque tecta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eò appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri desinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constituatur, ut sequentibus diebus,

DESCRIPTIO HOROLOGII.

absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Jam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. Quod si tantum unius diei spatium duabus observationibus intercesserit, oportet in postrema observatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima observatione annotatum fuerat, scrupulis primis 3, secundis 56. Ita enim rectè se habere perpendiculi longitudinem constabit; quum tanto superetur quælibet siderum fixorum revolutio à die solari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies solares, de meridie ad meridiem, non omnes inter se æquales sunt, ut mox amplius exponetur. Si vero post plures demum dies observatio repetatur, in singulos tantundem differentiæ causa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima observatione, ad momentum evanescentis stellæ, adnotata horologii hora 9, cum scrupulis primis 30, secundis 18; deinde, septimo post die, eâdem disparente stellâ, indicet horam 8, cum scrupulis pr. 50, sec. 24. Hæc hora deficit à priore scrupulis pr. 39, secundis 54. Quæ, in septem divisa, dant retardationem diurnam scrupulorum 5′. 42″. Debebat autem esse scrupulorum 3′. 56″. quæ illâ minor est scrupulis 1′. 46″. Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales; & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat; eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis

poris æquatoria quam subjicimus, intelligetur; postquam usum ejus ostenderimus, qui est hujusmodi. DESCRIPTIO HOROLOGII.

Accipiatur æquatio tabulæ, assignata diei qua primum cum sole, sive cum sciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum mensuram temperatum sit. Quod si jam prior æquatio major fuerit sequente, superare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter se æquationes istæ differunt. At si posterioris diei æquatio major inveniatur, erit excessus penes horam gnomonis, sive eam quæ ex sole observatur. Ut si, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant sciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, scrupulorum primorum 3, secundorum 11. lubeatque scire ejusdem mensis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die posteriori adscripta æquatio scrupulorum primorum 7, secundorum 27. quæ quia superat præcedentem scrupulis primis 4, secundis 16, debebit tanto serior esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hic proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt.

Dies.	Januar. Min.	Januar. Sec.	Febr. Min.	Febr. Sec.	Mart. Min.	Mart. Sec.	Apr. Min.	Apr. Sec.	Maj. Min.	Maj. Sec.	Jun. Min.	Jun. Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

DESCRIPTIO HOROLOGII.

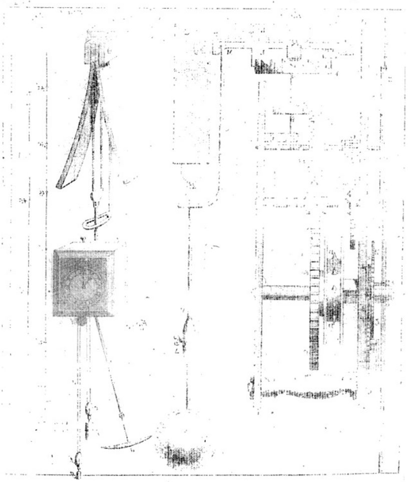
Jam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula ascendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{1}{3}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura 1. expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve, aut etiam minorem, partem æquat ponderis X, hinc fit ut sat magnis spatiis è priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissimam daturum sit dierum mensuram, divisimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito nimirum pondere Δ parte quinquagesima ponderis X, parique gravitate ipsius virgæ V V. Quæ quidem divisiones figura 4. exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est A B. Punctum A est centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oscillationis, partes singulæ, quindecim scrupulorum secundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oscillationis.

TAB. II. Fig. 1.

TAB. II. Fig. 4.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam hic describeremus, si quænam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etsi quidem jam nunc eo res deducta sit, ut parum

deesse



deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hic tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Ut autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hic ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse, confisum pen-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum differentiæ disignatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22′ reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30′. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Maretimo* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum na-

ves

ves in anchoris ſtant omnium optima videtur, quod, absque inſtrumentorum ope, ſolis oculis ex obſervationes peragantur.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hiſce, pondere ſemiſſis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca incluſæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum inſuper centum atque amplius librarum additum erat, quo melius perpendicularem ſitum ſuſpenſa in navi machina ſervaret.

Quanquam autem æquabilis admodum ſibique conſtans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggreſſi ſumus, quæ erat hujuſmodi. Rotæ illi quæ ferratos dentes habet, penduloque proxima eſt, pondus exiguum ex catenula affabre conſtructa appendimus, quo ſola ipſa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut ſingulis ſemiſcrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem reſtitueret; eadem fere ratione atque in conſtructione horologii ſuperius expoſita videre eſt, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem ſuam horologii motui impertit. Quibus ita conſtructis, cum veluti ad unicam rotam omnia eſſent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam conſtructa ex eodem tigno ſuſpendiſſemus, tignum vero fulcris duobus impoſitum eſſet; motus penduli utriuſque ita ictibus adverſis inter ſe conſenſere, ut nunquam inde vel minimum recederent, ſed utriuſque ſonus una ſemper exaudiretur: imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum u-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

trumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen causa non satis efficaciæ haberet, nisi & horologiorum motus aliunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadversum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota serrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C; lens plumbea B; laminæ cycloidales E D, F G. Clavula bifurcata H K; rota serratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum L L.

TAB. IV. Fig. 1.

TAB. IV. Fig. 2.

Suspensionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis F G ferreo gnomone F H K G sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est. in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocati sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium C C, & F G crassitudo, quæ pollicem

cem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque suum revertatur.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur superest, quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hactenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECUNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utramque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

DE DESCENSU GRAVIUM. TAB. IV. Fig. 1.

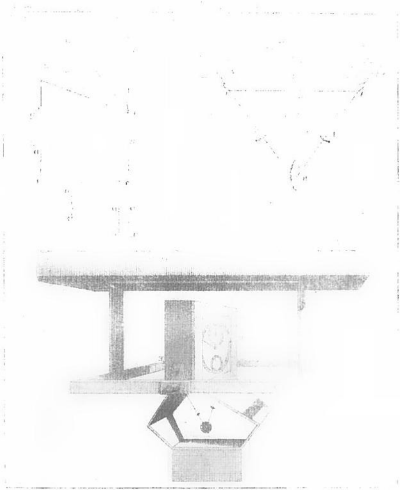
Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium C B. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D, apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum sursum tendit motus æquabilis C D, ipsam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur semper in puncto E. Quod si, utroque hoc casu, seorsim, uti diximus, duos motus consideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo ista simul ostendemus.

PROPOSITIO I.

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

TAB. V. Fig. 1.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapsum esse per spatium A B, atque ubi pervenit in B, acquisivisse celeritatem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere posset spatium quoddam B D. Scimus ergo spatium secundo tempore peragendum majus fore spatio B D, quia vel cessante in B omni gravitatis actione spa-



ſpatium B D percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpatium ipſi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, ſcimus tempore ſecundo grave perventurum ad E.

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium E F, quod duplum futurum ſit ſpatii B D; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium E F, etiam ſpatium F G, ipſi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hic habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium G H triplum ſpatii B D, & ſpatium H K ipſi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi.

Atque ita ſpatia quotlibet deinceps conſiderata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali exceſſu, qui ipſi B D æqualis ſit, creſcere manifeſtum eſt; ſimulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete caſum inchoante, dimidium eſt ejus ſpatii quod pari tempore tranſiret motu æquabili, cum velocitate quam acquiſivit ultimo caſus momento.

TAB. V. Fig. 1.

Ponantur quæ in propoſitione præcedenti, ubi quidem A B erat ſpatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. B D vero ſpatium quod pari tempore tranſiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquiſita erat in fine primi temporis, ſeu in fine ſpatii A B. Dico itaque ſpatium B D duplum eſſe ad A B.

Quum enim ſpatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente tranſmiſſa ſint A B, B E, E G, G K, quorum inter ſe certa quædam eſt proportio: ſi eorum temporum dupla tempora ſumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus ſpatia A B, B E, peracta fuere; pro ſecundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere ſpatia E G, G K, oportet jam ſpatia A E, E K, quæ ſunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter ſe eſſe ſicut ſpatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur ſit ut A B ad B E, ita A E ad E K; & convertendo, ut E B ſive D A ad A B ita K E ad E A: erit quoque, dividendo, D B ad B A ut exceſſus K E ſupra E A ad E A. Quum ſit autem, ex oſtenſis propoſitione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum ſimplici B D; apparet dictum exceſſum K E ſupra E A æquari quadruplæ

B D,

B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipsius B A: eadem vero E A æquatur, uti diximus, & duplæ A B & simplici B D. ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmissa, quorum utrumque ab initio descensus accipiatur, sunt inter se in ratione duplicata eorundem temporum, sive ut temporum quadrata, sive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquisitarum.

Quum enim ostensum sit propositione antecedenti spatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, crescere æquali excessu, qui excessus sit ipsi B D æqualis: Patet nunc, quoniam B D est dupla A B, spatium B E fore triplum A B; E G quintuplum ejusdem A B; G K septuplum; aliaque deinceps auctum iri secundum progressionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, sese consequentium, summa faciat quadratum, cujus latus est ipsa adsumptorum numerorum multitudo (velut si tres primi addantur, facient novem, si quatuor sexdecim) sequitur hinc spatia, à gravi cadente transmissa, quorum utrumque à principio casus inchoetur, esse inter se in ratione duplicata temporum quibus casus duravit, si nempe tempora commensurabilia sumantur.

Tab. V. Fig. 1.

Facile autem & ad tempora incommensurabilia demonstratio extendetur. Sint enim tempora hujusmodi, quorum inter se ratio ea quæ linearum A B, C D. spatiaque temporibus his transmissa sint E, & F, utraque nimirum ab initio descensus adsumpta. Dico esse, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita spatium E ad F.

Tab. V. Fig. 2.

Si

Si enim negetur; habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, sumta C G minore quam C D, & à C D auferatur pars D H, minor quam D G excessus C D supra C G, atque ita ut reliqua H C commensurabilis sit ipsi A B; hoc enim fieri posse constat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita spatium E, quod tempore A B peractum est, ad spatium peractum tempore C H, per superiùs ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore C D percurritur, nempe spatium F. ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C G; ergo minor quoque erit ratio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadrato C H; quod est absurdum, quum C H major dicta sit quam C G. Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.

Habeat jam, si potest, minorem; sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C L, sumptâ C L majore quam C D, & à C L auferatur L K minor excessu L D, quo C D superatur à C L, atque ita ut reliqua K C sit commensurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita est spatium E, peractum tempore A B, ad spatium peractum tempore C K. Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore C D, nempe spatium F. erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C L. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C L quam ejusdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C L minus erit quam qu. C K. quod est absurdum, quum C L major sit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam qua-

quadratum A B ad quadratum C D. quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora; apparet rationem spatiorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO IV.

SI grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

TAB. V. Fig. 1.

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali; tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse à gravi sursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D,

hoc est celeritatem K F, quia K F æquatur ipsis H G, B D, sunt enim partes singulæ H K, F G, æquales ipsi A B, ac proinde utraque simul ipsi B D, quam esse duplam A B ostendimus propositione 2. Itaque celeritatem in fine descensus K acquisitam sursum convertendo, si grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte spatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur ascensus K F spatio F G ipsi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypothesin initio sumptam. Ergo parte prima temporis ascendet grave tantum per K G, quo eodem spatio parte temporis novissima descenderat. Simul vero & celeritati tantum decessisse necesse est, quantum acquiritur temporis parte una deorsum cadendo, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G ascenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio ascensus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Est autem ipsi H G æqualis G D; quum æquetur ipsi F E una cum D B, hoc est una cum dupla A B, hoc est una cum duabus F G & E D; Ergo si ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, conficeret una parte temporis spatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur ascensus iste spatio D E, ipsi A B æquali. Ergo, hac secunda parte temporis, ascendet per spatium G E, quod simili temporis parte etiam cadendo transierat. Simul autem celeritati tantum decessisse denuo debet quantum temporis parte una ex casu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi usque ad E ascenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D aufertur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis est duabus D E, F G.

Est autem ipsi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipsi B D bis sumptæ, hoc est ipsi B D una cum dupla A B, hoc est una cum duabus A B, D E. Ergo si ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset una temporis parte spatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur ascensus iste ipso spatio A B. Proinde hac parte temporis per spatium E B tantum ascen-

ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipsius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi D B, hoc est duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi A B æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium B A, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas B D, patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmiserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse: sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo, operæ pretium erit demonstrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conscribere. itaque rursum hic demonstrabimus.

De descensu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete casum inchoante, dimidium esse ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum celeritate quam acquisivit ultimo casûs momento.

TAB. V. Fig. 3.

Sit tempus descensus totius A H, quo tempore mobile peregerit spatium quoddam cujus quantitas designetur plano P. ductaque H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli M H, hoc est, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non est æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumscriptâ triangulo A H L figurâ è rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius A H partibus æquetur, ut sunt rectangula B C, D E, F G, alterâque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt K E, O G &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu trianguli A H L supra planum P. hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti H L. Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli A H L supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius descensus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *; sitque celeritas in

* Prop. 1. huj.

in fine totius temporis acquisita H L; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K; quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo C E transmissum esse spatium quod majus sit quam K E, quia spatium K E transmissum fuisset tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K. habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurri posuerimus spatium M H, sequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri spatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad C K.

Quum ergo, ut dixi, spatium K E sit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K; manifestum est isto accelerato motu, tempore C E, majus spatium quam K E confectum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus spatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confectum esset tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, singulis temporis A H partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P. Itaque figura inscripta minor erit spatio P. quod est absurdum; eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus esse ostendetur.

Sit enim, si potest; & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circumscriptaque rursus, ut ante, sit triangulo A H L figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum

P superat triangulum A H L, erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P. Constat jam, prima temporis parte A C, minus spatium à mobili transmitti quam sit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis C E, minus spatium motu accelerato transmittetur quam sit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis A H, minora spatia à mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta. quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo A H L, sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est; quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectu gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

Ele-

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendiculum.

DE DESCENSU GRAVIUM. TAB. V. Fig. 4.

Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus per totam B C possit ascendere *. Ergo & per F B acquiret eam velocitatem qua possit ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuet porro motum per B C; quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest; ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

* Prop. 4. huj.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si vero, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri constat; eadem namque est demonstratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint

DE DESCENSU GRAVIUM. TAB. V. Fig. 5.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico tempus descensus per planum A C ad tempus descensus per A D esse ut longitudo A C ad A D. Est enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per A C *. Similiter tempus per A D est æquale tempori motus æquabilis per ipsam A D, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur casu per A D. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per A C, ad tempus descensus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. praced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per A C, ad tempus casus per A B perpendicularem, esse ut A C ad A B longitudine.

PROPOSITIO VIII.

SI ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac qualibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

TAB. VI. Fig. 1.

Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, supra horizontalem lineam D F per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis E F. descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per



per A B descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per G B *; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per G C planum descendisset; hoc est, quantam haberet ex descensu per E C. Quare & reliquum planum C D eodem modo transibit ac si per E C advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum E D, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per E F. quod erat demonstrandum.

DE DESCENSU GRAVIUM. * Prop. 6. huj.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

PROPOSITIO IX.

Si grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesserit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata sint sursum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A. Dico si mobile, post casum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventutum usque in E.

TAB. VI. Fig. 2.

Dicatur enim, si fieri potest, tantum ad G perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in F & H. Cum igitur mobile, superatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ possit ascendere per D G, vel per D H; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus esse constat ex propositione 6; Ergo, superato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuisset ascendere per C H,

DE DESCENSU GRAVIUM.

vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuisset ascendere per B F, hoc est, eandem quam acquireret descendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua potest ascendere usque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave descendendo per F B, posset ascendere per B A, hoc est, altius quam unde discesserat, quod fieri non potest.

Est autem eadem prorsus demonstratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Unde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurget.

PROPOSITIO X.

Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem.

TAB. IV. Fig. 3.

Ut si mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per superficiem B C D, in qua punctum C sit pari altitudine atque in A B est punctum E. Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas supersit mobili qua porro ascendat usque ad D punctum, æque altum ac A*: cumque & ex descensu per A E velocitatem eam acquirat qua, converso motu, ascensurum sit per C D*; Patet cum pervenit ad C ascendendo, eandem ipsum habere velocitatem, quam habebat in E descendendo; quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. præced.

PROPOSITIO XI.

Si mobile per superficiem aliquam deorsum tendat, ac deinde converso motu sursum per eandem

dem superficiem vel aliam similem similiterque posítam feratur, æqualibus temporibus per idem spatium descendet atque ascendet. DE DESCENSU GRAVIUM.

Velut si per superficiem A B descendat mobile, atque, ubi ad B pervenerit, converso motu sursum per eandem A B, vel ei similem & respectu plani horizontalis similiter positam B C, ascendat, constat ex ante demonstratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat ascendendo ac descendendo *; apparet eandem lineam bis eadem velocitate singulis sui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia esse necesse est; quod erat demonstrandum. TAB. VI. Fig. 4. * Prop. præced.

PROPOSITIO XII.

ESto circulus A B C, *diametro* A C, *cui ad angulos rectos sit* F G; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* A F *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* B D, *lineis* G F, A F *interceptum, minorem esse recta* D F. TAB. VI. Fig. 5.

Jungatur enim B C, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta B E, quæ necessario occurret rectæ F G inter F & D. Est igitur angulus B A C in circulo æqualis angulo E B C*. quare & angulus F B E, qui una cum E B C constituit angulum rectum F B C, erit æqualis B C A. Quia autem similia sunt triangula A B C, A G F, erit & angulus F æqualis angulo A C B. Ergo idem angulus F æqualis angulo F B E. Itaque isosceles est triangulus F E B, habens crura æqualia F E, E B. Addita ergo utrique eorum recta E D, fiet F D, æqualis duabus B E, E D. Hasce vero duas majores esse constat arcu B D, iisdem termi- * Prop. 32. Lib. 3. Eucl.

 nis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & F D eodem arcu B D major erit: quare constat propositum.

PROPOSITIO XIII.

TAB. VI. Fig. 6.

Isdem positis, si recta A B *occurrat ipsi* D G *intra circulum; Dico arcum* B D, *rectis* G D, A B *interceptum, majorem esse recta* D F.

Jungatur enim D C & ducatur arcui D B subtensa D B. Quoniam ergo angulus A B D æqualis A C D, hoc est, angulo A D G; angulus autem D F B major angulo A D F, sive A D G; erit idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B majus latere D F; unde multo magis arcus D B superabit eandem D F. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

TAB. VII. Fig. 1.

Sit cyclois A B C *cujus basis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus descriptus sit* B G D, *& a quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* E F *basi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *secetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem esse.*

Describatur enim per E punctum circulus L E K ipsi B G D æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Est igitur recta A K arcui E K æqualis; sed tota A D æqualis semicircumferentiæ K E L; ergo K D æqualis arcui E L sive G B. Est autem K D sive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo constat & G E æqualem esse arcui G B.

PRO-

PROPOSITIO XV.

DE DESCENSU GRAVIUM.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat. TAB. VII. Fig. 2.

Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac primo versus superiora velut H, & per H ducantur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, rectâ E B, sive M H; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

Deinde in recta H N sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis est arcui O A; O P autem major arcu O E; erit P Q minor arcu E A, hoc est, rectâ E B, sive P N. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multùm ei absimilem à clarissimo Wrennio editam inveniam in libro Wallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ O L TAB. VII. Fig. 3.

O L super regula L D; describente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L sumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum describens esset in A: quod punctum contactus semper inveniri potest, siquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter se parallelæ ducendæ sint, quarum altera transeat per punctum describens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter se distent quantum distat punctum datum A ab regula L D: dico ipsam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, sive circumferentiam M A F descriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C, per punctum A, ducta curvam ibidem continget.

Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod distet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ positus in B E D, cum punctum describens esset in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum describens esset in A, hic jam sublatum sit in E; & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

Quia ergo recta C D æqualis est curvæ E D; eâdem vero curva major est utraque simul E H, H D; erit E H major quam C H. Unde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis est L C A, ad K E C, fit angulus C E B: & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. sed E B æquale patet esse C A, cum sit idemmet ipsum unà cum figura transpositum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc est, quam C F. unde constat punctum B esse extra circumferentiam M A F.

Sit rursus punctum N in curva sumptum inter regulam L D & punctum A. Cumque punctum describens esset in N, ponatur situs figuræ fuisse in V L, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, sit jam

subla-

ſublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A; imo erit ipſa C A tranſlata in V N. Jam quia recta L C æquatur curvæ L V, ac proinde major eſt recta L V, erit in triangulo C L V angulus L V C major quam L C V. Quare addito inſuper angulo L V N ad L V C, fiet totus N V C major utique quam L C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars eſt L C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc eſt quam C M. Unde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

Eſt autem eadem quoque tum conſtructio tum demonſtratio, ſi curva genita ſit à puncto deſcribente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ ſumpto. Niſi quod, hoc poſteriori caſu, pars quædam curvæ infra regulam deſcendit, unde nonnulla in demonſtratione oritur diverſitas.

TAB. VIII. Fig. 1.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda eſt, datum in parte curvæ N A B, quæ infra regulam C L deſcendit, deſcripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam ſumpto, ſed certam poſitionem in eodem ipſius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum deſcribens eſſet in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, ſive circumferentiam radio C A centro C deſcriptam tangere curvam N A B in puncto A. Oſtendetur autem exterius ipſam contingere, cum in curvæ parte ſupra regulam C D poſita interius contingat.

Poſitis enim & deſcriptis iisdem omnibus quæ prius, oſtenditur rurſus angulus E C H major quam C E H. atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B; & à C E H auferendo H E B, qui æqualis eſt D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B. ſed ipſi E B æqualis eſt C A, ſive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F eſt ultra curvam N A B à centro remotum. Item

DE DESCENSU GRAVIUM. Item rursus ostenditur angulus L V C major L C V. Quare C V P, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulum D C N, fit V C N; & auferendo ab C V P angulum P V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Est autem ipsi V N æqualis C A sive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B à centro C remotum. Itaque constat circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsita semper regulæ perpendicularis; ut facile esset ostendere.

PROPOSITIO XVI.

DE MOTU IN CYCLOIDE. TAB. VIII. Fig. 2.

SI circuli circumferentiam, cujus centrum E, *secent rectæ duæ parallelæ* A F, B G, *quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera* A F *per centrum ipsum: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens: dico partem hujus* A B, *à parallela utraque interceptam, minorem esse arcu* A C, *ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui A C subtensa recta A C. Quia ergo angulus B A F est æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus B A F, vel minor recto vel rectus; ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B subtensum, majus erit latere A B. sed idem latus A C minus est arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.

PROPOSITIO XVII.

TAB. VIII. Fig. 3.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K, *circulum secuerit, quæ ab ea quæ centro propior est* A F; *tantundem distet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *à primis duabus parallelis intercepto minorem esse.*

Hoc enim patet quum A D ipsi A B æqualis sit, quam antea ostendimus arcu A C minorem esse.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. VIII. Fig. 4.

Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ secuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior est, vel tantundem atque altera distat, circumferentiæ occurrit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* B C.

Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo igitur A C L, angulus C æqualis est angulo M C F, hoc est, ei quem capit portio circuli C B F. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel ulterius distet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores sunt arcu C B. Ergo & A L una cum L B, hoc est, tan-

K gens

gens A B, eodem arcu C B major erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

TAB. VIII. Fig. 5.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à centro quantum hæc à reliqua* A F: *Erit pars tangentis in* B, *à parallela media, & ultimo addita* D K, *intercepta, nimirum* B D, *major arcu* B C.

Hoc enim manifestum est cum B D fiat ipsi B A æqualis, quam ostendimus arcu B C majorem esse.

PROPOSITIO XX.

TAB. VIII. Fig. 6.

Si arcus circuli, semicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi sunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* A B. *Easdem vero omnes, non omissa* A C, *majores esse arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc est, majores arcu* A N.

Ponamus enim primo perallelarum aliquas transire ab u-

tra-

traque parte centri Z, & sit G H, earum quæ sunt à parte B, centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehensæ, ut H K, L M, N O, singulæ suis arcubus minores sunt *. Porro autem & tangens G F, arcu sequente F D minor est *, & similiter tangens E D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores sunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, sive arcu B A, quod erat primo ostendendum.

* Prop. 16. huj.
* Prop. 17. huj.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter B O & A majores esse arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z transit quam parallela E F, quam pono proximam esse earum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque distabit.

Quod si E F longius à centro vel æque remota est ac G H, erit tangens F G major arcu suo F H, & reliquæ tangentes versus A, nimirum E D, C A majores singulæ arcubus suis *; adeo ut omnes simul G F, E D, C A majores sint arcu H A. sed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu L N tangens N O; itaque tangentes omnes, præter H K, majores simul erunt arcu A N; multoque magis, accedente ipsa H K, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem A N majores erunt.

* Prop. 18. huj.
* Prop. 19. huj.

Si vero G H à centro longius distat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M L ut ante major arcu L H, & tangens O N major arcu N L, & omnes proinde tangentes O N, M L, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major est arcu suo F D *, & tangens C A major similiter arcu suo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc est, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop. 19. huj.
* Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur; quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

PROPOSITIO XXI.

SI mobile descendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

TAB. IX. Fig. 1.

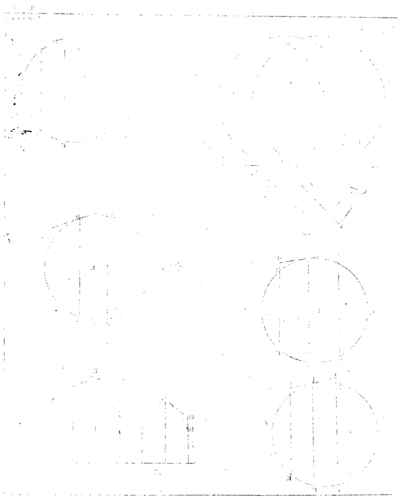
Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei F G H K L magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei A B C D E. Dico breviori tempore absolvi descensum per A B C D E, quam per F G H K L.

Nam primo quidem tempus descensus per A B, brevius esse constat tempore descensus per F G, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G*, sitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C post A B, æquale est tempori per eandem B C post M B, cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per A B, sive per M B descendenti *. similiterque tempus per G H post F G, æquale erit tempori per eandem G H post N G. Est autem tempus per B C post M B ad tempus per G H post N G, ut B C ad G H longitudine, sive ut C M ad H N, cum hanc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G*, ideoque etiam tempora reliqua. Estque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C post M B sive post A B,

* Prop. 7. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.



A B, brevius esse tempore per G H post N G sive post F G.
Similiter ostendetur, productis D C, K H sursum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D post A B C, sive post O C, brevius esse tempore per H K post F G H sive post P H. Ac denique tempus per D E post A B C D, brevius esse tempore per K L post F G H K. Quare totum tempus descensus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonstrandum.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatæ secundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius C D quam A B, hoc est, ut recta tangens curvam C D in F, magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus descensus per A B brevius quam per C D. TAB. IX. Fig. 2.

Idemque continget si altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

Si in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici; erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet; & accipiantur in ea por- TAB. IX. Fig. 3.

tiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc est, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ superiorem portionem B D includunt, æque inter se distent ac E G, F K, inferiorem partionem E F includentes. Dico tempus descensus per curvam B D brevius fore tempore per E F.

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, & in E F punctum M, ita ut eadem sit altitudo E supra M quæ B supra L. Et descripto super axe A C semicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N sit altius puncto O, manifestum est rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Est autem ipsi N A parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipsi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata est quam curva E F in puncto M. Quod si igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter easdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L. eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem est inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major ostendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus descensus per B D brevius erit tempore per *e f* *, sive, quod idem est, per E F. quod erat demonstrandum.

* Prop. 15. huj.

* Prop. præced.

LEMMA.

Tab. IX. Fig. 4.

Esto circulus diametro A C, *quem secet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipsi vero* D E *in* F. *Dico tres hasce*, A B, A D, A F, *proportionales esse.*

Sit enim primo intersectio F intra circulum; & arcui B D recta subtensa ducatur. Quia igitur arcus æquales sunt A E, A D,

A D, erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, E D A, A B D æquales. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D E, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque secundum jam demonstrata erit ut D A ad A *b*, ita A *b* ad A H, hoc est, ita A *f* ad A D: Ideoque rursus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

TAB. IX. Fig. 5.

Sit Cycloïs A B C, *cujus vertex* A *deorsum conversus sit, axe* A D *ad perpendiculum erecto; sumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, termineturque recta horizontali* A I. *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam* F A *in* X, *super ea describatur semicirculus* F H A. *Ducta deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *sumptum, recta* Σ G *parallela* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* H, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* M S, N T *interceptæ sint* M N, S T. *Iisdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, *& axis* D A *pars* Q R.

Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quan-*

DE MOTU IN CYCLOIDE.

quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis B G, *fore ad tempus quo percurretur recta* O P, *celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem* B I, *sicut est tangens* ʃ T *ad partem axis* Q R.

Describatur enim super axe A D semicirculus D V A secans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V secans rectas O Q, P R, G Σ in E K & Λ. Junganturitem H F, H A, H X & A Φ; quæ postrema secet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta *, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I sive ex F A, ad celeritatem ex B G, sive ex F Σ *. Atqui tota celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ, est in subduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ *, ac proinde eadem quæ F A ad F H Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Itaque tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compositam ex rationibus M N ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem ostendetur quæ F H ad H Σ.

* Prop. 5. Galil. de motu æquab.
* Prop. 1. huj.
* Prop. 3. huj.

Est enim tangens Cycloidis B I parallela rectæ V A, similiterque tangens M G N parallela rectæ Φ A; ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem est quæ Δ Π ad E K; hoc est, Δ A ad E A; hoc est, Φ A ad Λ A; hoc est V A ad Φ A *. Est autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H; nam quia quadratum V A æquale est rectangulo D A F, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula sunt inter se ut F A ad Σ A, hoc est ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H; atque etiam

* Lemma præced.

etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc est, propter triangula similia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideoque eadem erit quæ F X sive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita est tangens S T ad rectam Q R; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P constat esse sicut S T ad Q R. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Tab. X. Fig. 1.

Sit rursus ut in præcedenti propositione Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum spectet, axis* A D *ad horizontem erectus sit; & sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B ⊙ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* A ⊙ *in* ⊙: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & super* F A *describatur semicirculus* F H A. *Deinde alia recta* G E, *parallela* F B, *secet Cycloidem in* E, *rectam* B ⊙ *in* I, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G.

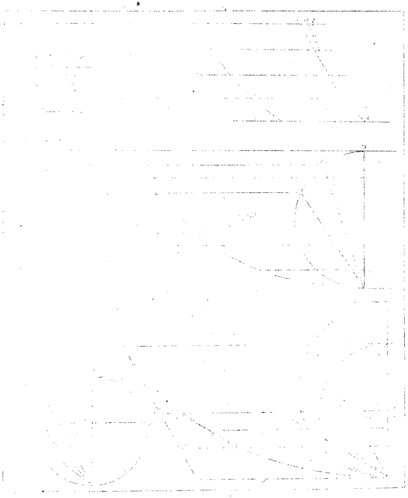
Dico tempus descensus per arcum Cycloidis B E, *esse ad tempus per tangentem* B I *cum celeritate dimidia ex* B ⊙, *sicut arcus* F H *ad rectam* F G.

Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum B E ad dictum tempus per B I, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.

Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per B E post N B, brevius tempore per B E. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur à tempore per B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. unde quidem tempus per B E post N B majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex B Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G.

Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ P Λ, Q Ξ, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam F H, ab iis, itemque à puncto H, tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes sursum ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æquali iis quæ ex divisione, ductâque R Φ parallelâ similiter ipsi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor est altitudine puncti H supra O. Jam vero sic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus est tempore motus continue accelerati per arcum B S post N B. Nam celeritas ex B S minor est celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquisita ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor in-



insuper est tangente V S, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus sit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S post N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T post N S, & tempus per tangentem Π Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y post N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum B E post N B. Eadem vero & minora esse, ut nunc ostendemus.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B Λ cum celeritate dimidia ex F A, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem axis F P*. Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam Λ Ξ cum eadem dimidia celeritate ex F A, ut tangens Γ Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, sicut tangentes circumferentiæ F H, iisdem parallelis comprehensæ, ad partes rectæ F G ipsis respondentes.

* Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ B Λ, Λ Ξ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli Δ X, Γ Σ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus

qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, sicut se habent omnes simul priores ad omnes eas ad quas ipsæ referuntur, hoc est, sicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c*. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G; ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G; quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major est dictis omnibus arcus F H tangentibus *. Atqui tempus per B E post N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, posuimus esse ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora simul erunt tempore per B E post N B, cum antea majora esse ostensum sit; quod est absurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, si potest, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, (sit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

Quod si jam sumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B E, sed cujus terminus superior N sit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E*. Manifestum autem quod punctum N tam propinquum sumi potest puncto B, ut differentia dictorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z superat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

TAB. X. Fig. 2.

* Prop. 22. huj.

Dividatur jam F G in partes æquales F P, P Q, &c. qua-

quarum unaquæque minor sit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F L; & additâ ad F G unâ earum partium G ζ, ducantur à punctis divisionum rectæ basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c; itemque à puncto ζ recta ζ Ω quæ secet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ secant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorsum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θ Δ, Γ Σ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζ Ω in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorsum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζ Ω in R.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

Quia igitur P ζ æqualis est F G altitudini arcus B E, cui æqualis est ex constructione altitudo arcus N M, erit & P ζ æqualis altitudini arcus N M. Est autem recta P O ex constructione superior termino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, superius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis sit altitudinis cum arcu N M, sed termino S sublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M *.

* Prop. 22. huj.

Atqui tempus per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, brevius est tempore descensus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S Λ transmissa ponitur, æqualis est celeritati ex S T *, quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur; ipsaque S Λ minor est quam S T. Similiter tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, brevius est tempore descensus accelerati per arcum T Y post S T; quum celeritas ex B T, qua tota T Ξ transmissa ponitur, sit æqualis celeritati ex S Y, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T Y post S T; ipsaque T Ξ minor sit arcu T Y. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur descendendo ex B usque ad punctum ipsarum contactus, breviora simul erunt tempore descensus accelerati

* Prop. 8. huj.

 per

DE MOTU IN CYCLOIDE.

per arcum S V. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

Est enim tempus dictum per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, sicut tangens semicirculi θ Δ ad rectam P Q*. similiterque tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, est ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ η, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ P ζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas P Q, Q Π &c. hoc est, totam P ζ esse ad omnes simul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. sicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis S Λ, T Ξ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, sive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus θ η ad rectam P ζ vel F G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam F G; est enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ η*. Sed tempus per N M posuimus ab initio ad idem tempus per B I se habere ut arcus L H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. 20. huj.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se æqualia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.

Esto cyclois A B C cujus vertex A deorsum spectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus sit, & à puncto quovis in cycloide sumpto, velut B; descendat mobile impetu naturali per arcum B A, sive per superficiem ita inflexam. Dico tempus descensus hujus esse ad tempus casus per axem D A, sicut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonstrato, etiam tempora descensus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter se æqualia esse constabit.

TAB. XI. Fig. 1.

Describatur super axe D A semicirculus, cujus circumferentiam secet recta B F, basi D C parallela, in E; junctàque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: sitque etiam super F A descriptus semicirculus F H A.

Est igitur, per præcedentem, tempus descensus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus semicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori descensus naturaliter accelerati per eandem B G, sive per E A, quæ ipsi parallela est & æqualis, hoc est, tempori descensus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus descensus per axem D A, ut semicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

Quod

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum B A descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem D A, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XXVI.

TAB. XI. Fig. 1.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis H I *quæ arcum* B A *secet in* I, *circumferentiam vero* F H A *in* H: *dico tempus per arcum* B I, *ad tempus per arcum* I A *post* B I, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* F H *ad* H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Est itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus F H A ad rectam F A *. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, est ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, sicut B G ad B K longitudine, hoc est, sicut F A ad F L. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, sicut F L ad arcum F H *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A post B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 24. huj.

* Prop. 24. huj.

H O-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

DEFINITIONES.

I.

LINEA *in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipsæ productæ pro tangentibus habentur.*

I I.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curvæ A B C, A D E, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*

TAB. XI. Fig. 1.

I I I.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.

M IV.

De linearum curvarum evolutione. Tab. XI. Fig. 2.

IV.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C *est evoluta*, A D E *descripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* D B *recta*, *reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifestum est autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

Recta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.

Tab. XI. Fig. 3.

Sit A B evoluta, A H vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ A C H, nusquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, manifestum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse H G, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ C H, evolutus sit arcus D G, occurret C D à parte D producta ipsi H G, ut in F. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ simul D F, F G, majores sunt quam D G, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C F, F G simul majores sint recta

C D

C D & ipsa D G. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ simul C F, F G majores quoque erunt recta H G; & ablata communi F G, erit C F major quam H F. Sed F E major est quam F C, quia angulus C trianguli F C E est rectus. Ergo F E omnino major quam F H. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam C E.

Tab. XII. Fig. 1.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C, sitque fili positio H G, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E: apparet autem D G rectam non posse esse in directum ipsi H G, adeoque H G D fore triangulum. Jam quia recta D G vel minor est quam D K G, vel eadem, si nempe evolutæ pars D G recta sit; additâ utrique G H, erunt rectæ D G, G H simul minores vel æquales duabus istis, scilicet D K G & G H, sive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor est recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major est quam D C, quia in triangulo D C E angulus C est rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm est ergo punctum H, hoc est extremitas fili G H, intra angulum D C E. Unde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C; ac proinde D C, cui C E ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

Hinc etiam manifestum est curvam A H C in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa A G B, cujus evolutione descripta est. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra spatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum spatium. unde liquet cavitatem A H C respicere convexitatem A G D.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. TAB. XII. Fig. 2.

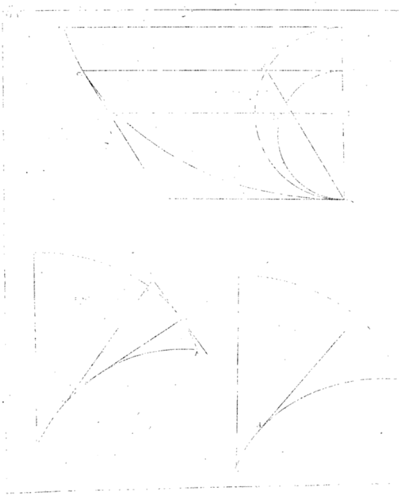
PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *ut potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D; *& à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis, quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* B N, C O, D P; *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo F E H; quales sunt anguli A K B, B L C, C M D. quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam subtensis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores esse ratione E F ad F G.

Quia enim angulus A K B major est angulo H E F, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. Angulus autem B trianguli K B N est rectus, sicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo ma-



major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major est quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B est obtusus, est enim major angulo H E F qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major ostendetur ratione E F ad F G. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & sumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, sit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E.

Tab. XII. Fig. 1.

Potest jam recta quædam sumi major curva K G A, quæ sit Q. Divisa autem intelligatur ipsa K G A, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut subtensæ singulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes simul dictæ subtensæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipsi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque necessario rectæ M D inter D & M. Unde

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

cum K E sit brevissima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor ostendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum sit ergo P A major quam F B, erunt duæ simul P A, O F majores quam O B. Item quum O B sit major quam G C, erunt duæ simul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres simul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rursus, quia N C major quam H D, erunt duæ simul N C, M H majores quam M D. Unde, si loco N C sumantur tres hæ ipsa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipsa M D major erat quam K E. Diximus autem subtensas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam sit K E, habebunt dictæ subtensæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo subtensæ simul sumptæ majores erunt recta Q. Hæc autem ipsa curvâ A G K major sumpta fuit. Ergo subtensæ A F, F G, G H, H K simul majores erunt curva A G K cujus partibus subtenduntur; quod est absurdum, cum singulæ suis arcubus sint minores. Non igitur poterunt esse duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit sese habeant. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; posterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cæpta, describetur.

Sun-

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum uttraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C, velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius A B C, à termino A incepta, describi A D E.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE. TAB. XII. Fig. 4.

Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipsi A F G ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D E, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa A B C; nam de linea A D E constat ex hypothesi, de A F G vero ex propositione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est *. Quare constat ipsam A D E descriptum iri evolutione lineæ A B C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & æqualis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superpositæ, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit A E F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A E F ad angulos rectos.

TAB. XVI. Fig. 1.

Describatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

culus genitor A H D, cui occurrat B H, basi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, constat eam parallelam esse rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum est, ac proinde A K æqualis H B, hoc est, arcui A H *. Sit porro jam descriptus circulus K M, genitori circulo, hoc est ipsi A H D, æqualis, qui tangat basin A G in K, rectam vero B K productam secet in puncto E. Quia ergo ipsi A H parallela est B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifestum est B K productam abscindere à circulo K M arcum æqualem ei quem à circulo A H D abscindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis est arcui A H, hoc est rectæ H B, hoc est rectæ K A. Hinc vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum describens fuisse in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi in E ad angulos rectos *. Est autem K E ipsa B K producta. Ergo patet productam B K occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

* Propos. 15. partis 2.

* Propos. 14. partis 2.

* Propos. 15. partis 2.

PROPOSITIO VI.

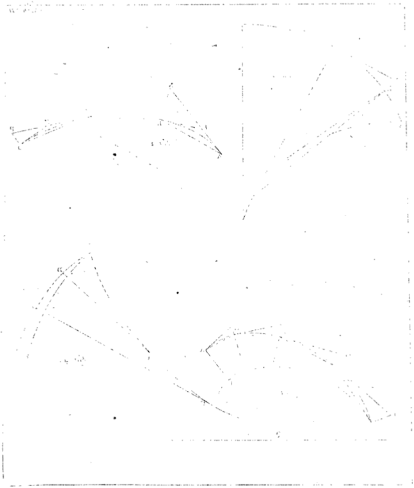
Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evolutæ æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

TAB. XVI. Fig. 1.

Sit semicyclois A B C, cui superimposita sit alia similis A E F, quemadmodum in propositione præcedenti. Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes semicycloidis A B C occurrant semicycloidi A E F ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, describi *. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. huj.

Et



Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi A B C gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ C G disponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in C F, circa eam replicatur, alteram semicycloidem F N fili extremitate describtum iri, quæ simul cum priore A E F integram constituat.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem inflexas, suspensum agitatumque, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus quaslibet ejus reciprocationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

Repetita enim figura præcedenti: cum post totam semicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla est A D, proptarea quod axes cycloidum A B C, A E F sunt æquales; apparet semicycloidem ipsam A B C, filo sibi circum applicito æqualem, duplam esse sui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis sui quadruplam.

TAB. XVI. Fig. 1.

Apparet etiam tangentem B E, quæ refert partem fili extensam, antea curvæ parti B A applicatam, huic ipsi longitudine æquari. Est autem B E dupla ipsius B K, sive A H, quoniam in propositione quinta ostensum est K E ipsi A H æqualem esse. Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, sive B K, dupla erit: existente nimirum B H parallela basi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B sumptum fuerit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Hanc cycloidis dimensionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Christophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonstratione confirmavit, quæ edita est in libro de cycloide viri clarissimi Ioannis Wallisij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa nostri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occasionem præbuere problemata quædam à Blasio Paschalio Gallo proposita, qui in his studiis præcellebat. Is cum sua, tum aliorum inventa recensens, primum omnium Mersennum lineam hanc in rerum natura advertisse ait. Primum Robervallium tangentes ejus definivisse, ac plana & solida dimensum esse. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus invenisse. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dedisse. Me quoque primum reperisse dimensionem absolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, basi parallelâ, abscinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abest. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem descripto. Seipsum denique solidorum ac semisolidorum, tam circa basin quàm circa axem, centra gravitatis definivisse, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipsius (Sed hæc post acceptam à Wrennio dimensionem) centrum gravitatis invenisse, & dimensionem superficierum convexarum, quibus solida ista eorumque partes comprehenduntur; earumque superficierum centra gravitatis. Ac denique dimensionem curvarum cujusvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc est earum quæ describuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris sumpto. Et horum quidem demonstrationes à Paschalio sunt editæ. A quibus suas quoque, de eadem linea, subtilissimas meditationes, exposuit Cl. Wallisius, atque eadem illa omnia suo Marte se reperisse, ac problemata à Paschalio proposita solvisse contendit. Quod idem & doctissimus Lovera sibi vindicat. Quantum vero unicuique debeatur, ex scriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod silentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum est, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut

peni-

penitiùs quam cyclois cognita ſit. Methodum vero noſtram, qua in hac metienda uſi ſumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola deſcribatur oſtendere.

TAB. XIII. Fig. 1.

Sit paraboloides A B, cujus axis A D; vertex A; proprietas autem iſta, ut ordinatim ad axem applicatâ B D, cubus abſciſſæ ad verticem D A æquetur ſolido, baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipſius M. Jam ſi filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico deſcriptam ex evolutione eſſe parabolam E F, cujus axis E A G, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A.

Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipſo tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F; & ſit ipſi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget; & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Eſt igitur K G æqualis dimidio lateri recto, hoc eſt, ipſi E A; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque A K, erit E K æqualis A G. Eſt autem A G triens ipſius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonſtrari poteſt. Ergo & E K æqualis eſt trienti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla eſt K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis eſt $\frac{8}{27}$ cubi ex A D, hoc eſt, ſolido baſin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc eſt, ipſi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc eſt ad K G. Erat autem K H æqualis $\frac{2}{3}$ A D, hoc eſt ipſi G D. Ergo

 ut

ut quadratum B D ad quadratum D G ita est H K ad K G. Ut autem H K ad K G, ita est quadratum F K ad quadratum K G. Ergo sicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde sicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Unde sequitur B G F esse lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad angulos rectos. Idque similiter de quavis illius tangente demonstrabitur. Ergo constat ex evolutione lineæ E A B, à termino E incepta, describi parabolam E F *. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut cubi abscissarum ad verticem.

TAB. XIII. Fig. 2.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifestum est. Parabola vero E F ad constructionem non requiritur, quæ sic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem si A G fuerit tertia pars A D, inter verticem & ordinatim applicatam B D interceptæ. Porro sumpta A E æquali $\frac{4}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum est paraboloidis A B, ducatur E F parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela est B D, in F. Jam si ad rectam B G addatur N F, excessus rectæ E F supra E A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonstratio ex ante dictis facile perspicitur.

Semper ergo curva A B tantum superat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rursus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimensi sunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemensis rectæ æqualem ostendit, cujus demonstratio post commentarios Joh. Schotenii in Cartesii Geo-

Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geometricè definiuntur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate.

De linearum curvarum evolutione.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium absuisse, neque tamen plane id adsecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius cur-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

væ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis 24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum &c. Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ báseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo.*

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIII. fig. 3.

SIt datum conoides cujus sectio per axem parabola A B C; axis ejus B D, vertex B, diameter basis A C, quæ sit axi B D ad angulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

Pro-

Producto axe à parte verticis, sumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro secetur A D in G, ut sit A G ad G D sicut E A ad A D. Et utrisque simul A E, D G æqualis statuatur recta H. Item trienti basis A C æqualis sit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis A B C. Hinc sequitur, si fuerit A E dupla A D, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 13 ad 6. si A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si A E ad A D ejusmodi rationem habuerit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire.

Esto sphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E, cujus minor diameter D E.

TAB. XIII. Fig. 4.

Ponatur D F æqualis C B, seu ponatur F alter focorum ellipseos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ E D in G. centroque G, radio G B, describatur super axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque semidiametrum C D & rectam utrisque æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis sit recta K. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis A D B E æqualis sit.

Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire.

Sit sphæroides latum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E.

TAB. XIII. Fig. 5.

Sit rursus focorum alteruter F, divisâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ basin habeat axem A B, verticem vero punctum G. Sitque inter dimatrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media proportionalis

por-

portionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis propositi æqualis sit.

Conoidis hyperbolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIV. Fig. 1.

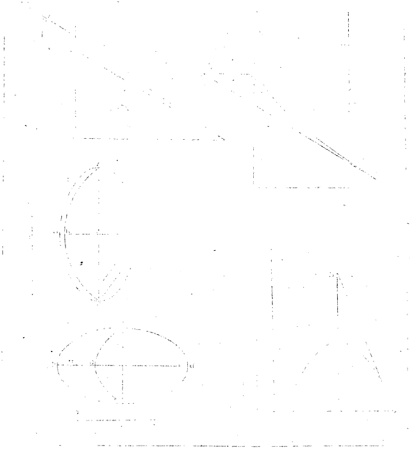
Esto conoides hyperbolicum cujus axis A B, sectio per axem hyperbola C A D, cujus latus transversum E A, centrum F, latus rectum A G.

Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio lateri recto A G. & ut H F ad A F longitudine ita, sit A F ad F K potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola descripta K L M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transversum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipsi producta B C in M, sitque A L parallela B C. Erit jam sicut spatium A L M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehensum, ad dimidium quadratum ex B C, ita superficies conoidis curva ad circulum baseos suæ, cujus diameter C D. Unde constructio reliqua facile absolvetur, positâ hyperbolæ quadraturâ.

Quum igitur conoidis parabolici superficies ad circulum redigatur, æque ac superficies sphæræ, ex notis geometriæ regulis; in superficie sphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum est arcus circumferentiæ longitudinem æquari posse lineæ rectæ. Ad sphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici superficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in sphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox ostendemus.

Verum, quod non indignum animadversione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ suppositione, circulum æqualem construi superficiei utrique simul, sphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

Dato enim sphæroide quovis lato, posse inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, posse inveniri sphæroides latum ejusmodi, ut utriusque simul



mul superficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in casu uno cæteris simpliciore sufficiet attulisse.

De linearum curvarum evolutione.

Sit sphæroides latum cujus axis S I, sectio per axem ellipsis S T I K; cujus ellipsis centrum O, axis major T K. ponatur autem ellipsis hæc ejusmodi, ut latus transversum T K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea secundum extremam & mediam rationem secta, ad partem sui majorem.

Tab. XIV. Fig. 2.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & sint hæ quatuor continue proportionales B C, B A, B F, B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, sive ½ latus transversum F B; dimidium latus rectum æquale B C.

Hujus conoidis superficies curva, unà cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.

Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, basis A C axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire.

Tab. XIV. Fig. 3.

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H; basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit; ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla est A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ mensura, & illa ab hac vicissim.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet veræ proximam solutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

TAB. XV. Fig. 1.

Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C.

Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarithmus hic (qui semper est idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui spatium D E V B A D designabit, tribus rectis & curva D A B comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum D C est 100000, 00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis D A B.

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

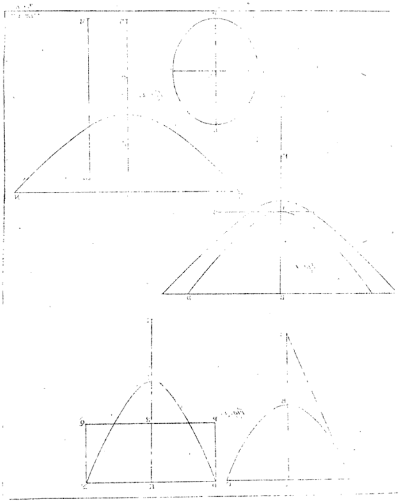
Ab 1, 55630, 25008, logar°. 36.
auferatur 0, 69897, 00043. logarus. 5.

Erit 0, 85733, 24965. differ. logarorum.
Et 9, 93314, 92856. logarus. differentiæ.
Cui addatur 0, 36221, 56887. logarus. semper addendus.

Fit 10, 29536, 49743. logarus. spatii D E V B A D.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii D E V B A D proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum D C est 100000, 00000.

PRO-



PROPOSITIO X.

De linearum curvarum evolutione.

Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales.

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis transversus A C; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipsius A E. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; sitque B G ipsi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G usque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E. (Tab. XV. Fig. 2. & 3.)

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, esse eam cujus evolutione, unà cum recta E A, describetur sectio A B. Ipsam autem B H tangere curvam in H, & esse toti H E A æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio, minimumque habere terminorum, si fuerit A B hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N; vocatâque A C, a; C N, x; & N H, y; erit semper cubus ab $\overline{xx - yy - aa}$ æqualis $27\, xxyyaa$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ E H M puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostendetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi; sicut quadrans A B L

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

evolutione lineæ A E H M, quadrans C L evolutione similis huic oppositæ C O M. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta A E æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur in puncto axis minoris M, sumpta L M æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut A D ad D E, ita L M ad M D.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

Data linea curva, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit.

TAB. XV. Fig. 4. & 5.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipsa A B F describatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ D E, necesse est occurrere lineæ A B F, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi A B F ad rectos angulos insistunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & siquidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D dista-

ſtabit ab A; interſectio vero rectarum B D, F E, quæ eſt G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipſas B D, F E neceſſe eſt, cum curvæ B F ad partem cavam inſiſtant rectis angulis.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quanto autem punctum F ipſi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, ſi interſtitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ducta recta B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F cenſebitur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F L: ſecetque F L rectam B O in P, & ſint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipſi K L. Quia igitur ratio B G ad G M eſt eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa; & quia recta B M datur magnitudine ac poſitione, dabitur & punctum G in producta B M, ſive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N, ſimpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam inveſtigavimus, invenimuſque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compoſitionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, ſive N H ad L H, & ex B P ſive K L ad M N; patet, ſi rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compoſitam rationem B O ad M N datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in ſequentibus patebit; ac proinde iis ſemper curvas adſignari poſſe, quarum evolutione deſcribantur, quæque ideo ad rectas lineas ſint reducibiles.

TAB. XVI. Fig. 2.

Ponatur primò parabola eſſe A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, ſint parabolæ ad angulos rectos; ductæque ſint ad axem A Q perpendiculares B K, F L; erunt, ex proprietate parabolæ, ſingulæ M K, N L dimidio lateri recto æquales; & ablata communi L M, æquales inter ſe K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, ſitque earum poſterior ratio

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

æqualitatis; liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L; & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N L ad L H, sive M K ad K H; nam L H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio M K ad K H, dato puncto B; quoniam tam M K, quam K H dantur magnitudine; nam M K æquatur dimidio lateri recto, K H vero duplæ K A. Dataque etiam est positione & magnitudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva R D E; quod nempe invenitur productâ B M usque in G, ut sit B M ad M G sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam K A.

Et sic quidem, adsumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam R D E geometricam esse constat, unáque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Ut si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ C D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a; A K, b; A Q, x; Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc est, K M ad M Q, est ea quæ $\frac{1}{2} a$ ad $2 b$, estque ipsa K M $= \frac{1}{2} a$, erit & M Q æqualis $2 b$. Est autem M A $= \frac{1}{2} a + b$. ergo A Q sive x æqualis $3 b + \frac{1}{2} a$. Unde $b = \frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$. Porro quoniam, sicut quadratum M K, hoc est, $\frac{1}{4} aa$ ad quadratum K B, hoc est, $a b$, ita qu. M Q, hoc est, $4 b b$ ad qu. Q D; erit qu. Q D, sive $y y = \frac{16 b^3}{a}$. Ubi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$, quod illi æquale inventum est, fiet $y y = 16.$ cub. $\frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{27}{16} a y y$ $=$ cubo ab $x - \frac{1}{2} a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $= \frac{1}{2} a$; eritque R Q $= x - \frac{1}{2} a$. Curvam igitur C D ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. Q D, altitudo $\frac{16}{27} a$; ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam A B supra ostendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{16}{27}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{27}{16}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

Quo-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

TAB XV. Fig 4. & 5.

Quomodo porro ratio O B ad B P, sive N H ad H L, non tantum cum A B F parabola est, sed etiam alia quælibet curva geometrica, semper inveniri possit manifestum est. Quoniam tantum recta F H ducenda est, quæ curvam in adsumpto puncto F tangat, & F N ipsi F H perpendicularis: unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

At non æque liquet quo pacto ratio K L ad M N innotescat, quam tamen semper quoque reperiri posse sic osten-demus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares super K L, sitque K T æqualis K M, & L V æqualis L N, & ducatur V X parallela L N, quæ occurrat ipsi K T in X. Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum L K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc est, quæ duarum L V, K T; est autem differentiæ ipsarum L V, K T æqualis X T, & X V ipsi L K; erit proinde N M æqualis duabus simul V X, X T, vel ei quo V X ipsam X T superat. Atque adeo, si data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque simul V X, X T, vel ad excessum V X supra X T, hoc est, data erit ratio V X sive L K ad N M.

Sciendum est autem, quoniam K T ipsi K M, & L V ipsi L N, æquales sumptæ sunt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox ostendetur. Et siquidem sit linea recta; ut contingit si A B F coni sectio fuerit, & K L axis ejus; constat rationem V X ad X T datam fore, data positione ipsius lineæ V T, quæ locus est puuctorum V, T; semperque eandem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L.

At si locus alia linea curva fuerit, diversa erit ratio V X ad X T, prout majus minusve fuerit intervallum K L. Inquirendum est autem quænam futura sit ista ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem posuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum est; unde recta V T, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; potest enim duci quoniam

niam curva, ad quam sunt puncta T, V, geometrica est. Ratio igitur Y K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T. ex qua etiam rationem L K ad N M dari ostendimus.

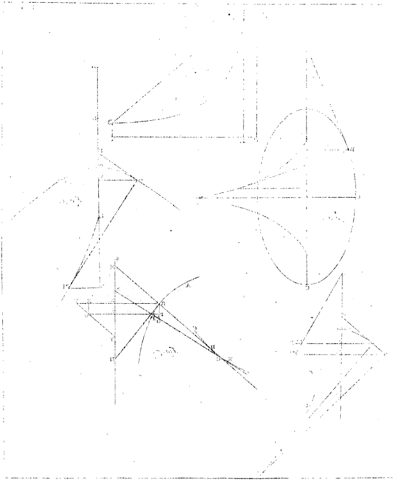
Quænam vero sit linea ad quam sunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, x; K T, y. Nam quia data est curva A B F, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ K M, per methodum tangentium à Cartesio traditam, quæ ipsi K T, sive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ T V innotescet, ad quam deinde tangens ducenda est. Sed clariora omnia fient sequenti exemplo.

TAB. XVI. Fig. 3. Sit A B F paraboloides illa, cui superius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, sint inter se sicut quadrata ex ipsa S K abscissarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione paraboloides S B F describatur.

Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci scimus, sumpta S H æquali $\frac{1}{2}$ S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos insistat, dantur jam lineæ M H, H K, ac proinde earum inter se ratio, quæ est eadem quæ O B ad B P.

Ut autem ratio B P, sive K L ad M N innotescat, ponantur ad K L perpendiculares rectæ K T, L V, æquales singulis K M, L N, sitque V X parallela L K. Jam quia ex duabus simul K L, L N, auferendo K M, relinquitur M N *; hoc est, auferendo ex duabus X V, V L, sive X V,

* *In Exemplari suo ad marginem scripsit Auctor.* supponitur hic rectam L N majorem esse quam K M, quod melius fuerat antea probari, etsi verum est. *Demonstratio autem haud difficilis est, sit abscissa* S K ∞ x; *perpendicularis* K B ∞ u; *latus rectum paraboloidis* ∞ a. *Quia* S H ∞ $\frac{1}{2}$ SK, *est* H K ∞ $\frac{1}{2}$SK ($\frac{1}{2}$x). *Propter angulum rectum* H B M, *triangula rectangula* H B K, K B M *similia sunt, &* H K ($\frac{1}{2}$x), K B (u), K M, *sunt in continua proportione; ergo* K M ∞ $\frac{2uu}{3x}$, *cujus quadratum est* $\frac{4u^4}{9xx}$ ∞ $\frac{4au^4}{9axx}$; *sed ut notavit auctor ex natura Paraboloidis* A B F, u^3 ∞ axx; *ergo quadratum lineæ* K M ∞ $\frac{4au^4}{9axx}$ ∞ $\frac{4au^4}{9u^3}$ ∞ $\frac{4}{9}$au *unde sequitur ipsam* K M, *augeri si crescat* B K (u). *Cum autem* L F *excedat* B K, L N *superabit* K M, quod demonstrandum erat.



X V, X K, ipsam K T; hinc autem relinqui apparet V X & X T: erunt igitur hæ duæ V X, X T ipsi M N æquales, ac proinde ratio K L ad M N eadem quæ V X ad duas simul V X, X T. Ut autem hæc ratio innotescat cum intervallum K L est minimum; oportet secundum prædicta inquirere quis sit locus, sive linea ad quam sunt puncta T, V. Quod ut fiat sit latus rectum paraboloidis A B F ∞ a; S K ∞ x; K T ∞ y.

Quia igitur proportionales sunt K H, K B, K M, estque H K ∞ $\frac{3}{2} x$: K B ex natura paraboloidis æqualis R. cub. $a x x$: fiet K M, hoc est K T ∞ $\frac{2}{3}$ R. cub. $a a x$ ∞ y, ac proinde $\frac{8}{27} a a x$ ∞ y^3. Unde patet locum punctorum T, V, esse paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, sumptâ S Y duplâ ipsius S K, junctâque Y T. Et jam quidem ratio V X ad duas simul V X, X T, quam diximus eandem esse ac K L ad M N, erit ea quæ Y K ad utramque simul Y K, K T. Hæc autem ratio data est, ergo & ratio K L ad M N. Sed & rationem O B ad P B datam esse ostensum est. Ergo, cum ex duabus hisce componatur ratio B D ad D M, ut supra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio B M ad M D; adeoque & punctum D in curva D E.

Ad constructionem autem brevissimam hoc pacto hic perveniemus. K T sive K M dicta fuit y. Itaque M H erit $y + \frac{3}{2} x$. Et M H ad H K, sive O B ad B P, ut $y + \frac{3}{2} x$ ad $\frac{3}{2} x$. sive, sumptis omnium duplis, ut $2 y + 3 x$ ad $3 x$. Deinde quia Y K ∞ $3 x$, erit Y K ad Y K + K T, sive per prædicta, K L ad M N, ut $3 x$ ad $3 x + y$. Atqui ex rationibus O B ad B P, & K L ad M N, componi diximus rationem B D ad D M. Ergo ratio B D ad D M erit composita ex rationibus $2 y + 3 x$ ad $3 x$, & $3 x$ ad $3 x + y$; ideoque erit ea quæ $2 y + 3 x$ ad $3 x + y$. & dividendo, ratio B M ad M D, eadem quæ y ad $3 x + y$.

Sit S Z perpendicularis ad S K, eique occurrat M B producta in Z. Quia ergo ratio B M ad M D inventa est ea quæ y ad $y + 3 x$, hoc est quæ M K ad M K + 3 K S. Sicut autem

DE LINEA-RUM CURVARUM EVOLUTIONE.

tem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Unde liquet M D æqualem sumendam ipsi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Constat autem geometricam esse, & si velimus, possumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipsius ad puncta axis S K.

TAB. XVII. Fig. 1.

Simili modo autem, si inquiramus in paraboloide illa sive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut portiones axis abscissæ, inveniemus curvam cujus evolutione describitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori constructione per puncta determinari. Nam si fuerit illa S A B; axis S M; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus sit ejusmodi, ut ductâ S Z, quæ secet S M ad angulos rectos, ea portiones similes curvæ habeat ad partes oppositas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide sumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos secet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde sumatur B D æqualis dimidiæ B M, unà cum sesquialtera B Z. Eritque D unum è punctis curvæ quæsitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, describetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum est, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipsius A R D, in infinitum porro continuatæ, describatur paraboloidis pars infinita A B F; evolutione autem totius A R I, similiter in infinitum extensæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, sumptâ S P quæ sit ad latus rectum paraboloidis, sicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus est ex 45) applicatâque ordinatim P A. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur sicut cætera omnia harum

rum curvarum, hoc eſt, ſicut punctum D modo inventum fuit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, ſemper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipſa deſcribatur, quæque propterea rectæ adæquari poſſit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo conſtructionem univerſalem ſequenti tabella exhibemus, quæ quousque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si}\ \begin{cases} a\,x \propto y^2 \\ a^2x \propto y^3 \\ a\,x^2 \propto y^3 \\ a\,x^3 \propto y^4 \\ a^3x \propto y^4 \end{cases} \text{Erit} \begin{cases} \mathrm{BM} + 2\,\mathrm{BZ} \\ \tfrac{1}{2}\mathrm{BM} + \tfrac{3}{2}\mathrm{BZ} \\ 2\,\mathrm{BM} + 3\,\mathrm{BZ} \\ 3\,\mathrm{BM} + 4\,\mathrm{BZ} \\ \tfrac{1}{3}\mathrm{BM} + \tfrac{4}{3}\mathrm{BZ} \end{cases} \propto \mathrm{BD}.$$

TAB. XVII. Fig. 2.

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipſa quidem S K ſemper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K ∞ x; B K ∞ y, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis eſt ipſi S K; & latere recto curvæ ∞ a; prior pars tabellæ, quæ ad ſiniſtram eſt, naturam ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ ſi curvæ S B inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D in curva quæſita C D. Exempli gratia, ſi S B eſt parabola quæ ex coni ſectione fit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $a\,x \propto y^2$; cui reſpondet ab altera parte B M + 2 B Z ∞ B D. Unde longitudo lineæ B D cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ.

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut B M ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis x in æquatione; B Z vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis y; ex his autem utriſque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis a.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Præter hasce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et harum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est è coni sectione.

TAB. XVII. Fig. 3.

Reliquarum vero naturam ut explicemus; sunto P S, S K, asymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, sitque S K ∞ x; K B ∞ y. Si igitur hyperbola sit A B, scimus rectangulum linearum S K, K B, hoc est, rectangulum $x\,y$ semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur $a\,a$.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato lineæ S K, in altitudinem K B ductum, hoc est, solidum $x\,x\,y$, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} x\,y \infty a^2 \\ x^2 y \infty a^3 \\ x\,y^2 \infty a^3 \\ x^3 y \infty a^4 \\ x\,y^3 \infty a^4 \end{array}\right. \quad \text{Erit}\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\text{B M} + \tfrac{1}{2}\text{B Z} \\ \tfrac{2}{3}\text{B M} + \tfrac{1}{3}\text{B Z} \\ \tfrac{1}{3}\text{B M} + \tfrac{2}{3}\text{B Z} \\ \tfrac{3}{4}\text{B M} + \tfrac{1}{4}\text{B Z} \\ \tfrac{1}{4}\text{B M} + \tfrac{3}{4}\text{B Z} \end{array}\right\} \infty \text{B D}.$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio est $x\,y \infty a^2$, sumetur B D ∞ $\tfrac{1}{2}$ B M + $\tfrac{1}{2}$ B Z, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva D C quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum

rum quæ ex paraboloidibus nascuntur constructionem, ducendæ sunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B secent curvas A B, sive ipsarum tangentes B H, ad angulos rectos; dicemus in universum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, considerare oportet quæ sint exponentes potestatum x & y, & facere ut, sicut exponens potestatis x ad exponentem potestatis y, ita sit S K ad K H. Juncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio est $x y^2 \propto a^3$: quia exponens potestatis x est 1, potestatis autem y exponens 2; oportet esse ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonstrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non solum paraboloidum istarum, sed & spatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & asymptotos interjectorum, plana solidaque dimensi sunt. Quod quidem & nos, facili atque universali methodo, expedire possemus, ex sola tangentium proprietate sumpta demonstratione. Sed illa non sunt hujus loci.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUARTA.

De centro Oscillationis.

Centrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectori-

 bus,

bus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed a nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, & viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Unde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur. DE-

DEFINITIONES.

I.

Pendulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura quælibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes,

nes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

V I.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.

V I I.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

V I I I.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

I X.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

X I.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

Si pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est. ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari.

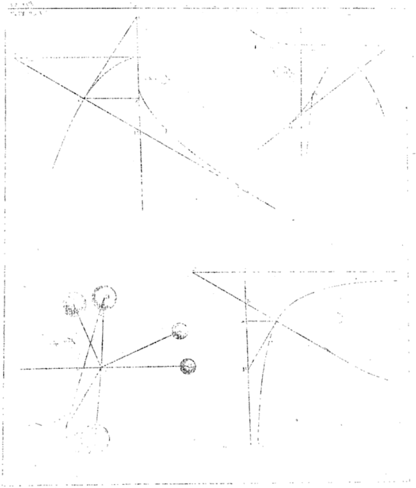
DE CENTRO OSCILLATIONIS. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro ascendere poterit.

Quod si jam pondera quotlibet non inter se connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis esse scimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compositæ altitudinem censeri debere; siquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci possunt, nullâ aliâ accersita potentia quam quæ ipsis ponderibus inest, sed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus est. Quare, sicut fieri non potest ut pondera quædam, in plano eodem horizontali posita, supra illud planum, vi gravitatis suæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque dispositorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum transiens, perduci posse, sic ostendetur.

TAB. XVII. Fig. 4. Sint pondera A, B, C, positione data, quorum commune gravitatis centrum sit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus sectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera sibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A sit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rursus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ secet planum E F in F; ubi necessario quoque erit centrum gravitatis binorum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, G, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in E, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem,

suo



suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quotcunque aliis est demonstratio.

Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam possibilem esse.

II.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; siquidem, quæcunque fuerit penduli figura, æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, cu-

TAB. XVIII. Fig. 1.

cujus sectio recta D F, inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico summam productorum, quæ fiunt à singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.

Intelligantur enim perpendiculares, à singulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani D F, sintque singulæ D K, E L, F M, ipsi H G æquales, omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, sive G H, ductæ in K. Similiter E B in B æquabitur E L, sive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, sive G H, in M. Ergo summa productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur summæ productorum ex G H in omnes K,L,M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipsis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipsorum gravitatis G suspensis, æquiponderabunt. Unde, cum distantia G H æqualis sit singulis D K, E L, F M, necesse est magnitudines A, B, C, simul sumptas, æquari ipsis K, L, M. Itaque & summa productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonstrandum.

Etsi vero in demonstratione positæ fuerint rectæ A K, B L, C M, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, si omnia simul in alium quemlibet situm transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes sint eædem quæ prius. Quare constat propositum.

PRO-

PROPOSITIO II.

De centro oscillationis. TAB. XVIII. Fig. 1.

Positis quæ prius, si pondera omnia A, B, C, *sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium* A D, B E, C F, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ,* G H, *multiplici secundum ponderum numerum.*

Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; sitque hìc, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi G H, multiplici secundum ponderum numerum: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

TAB. XVIII. Fig. 2.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P.

Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

PROPOSITIO IV.

Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

TAB. XVIII. Fig. 1. 4. Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto

cto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt L G, M H, N K. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines *, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelligantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. part. 2.

* Hypoth. 1. huj.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum sua-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

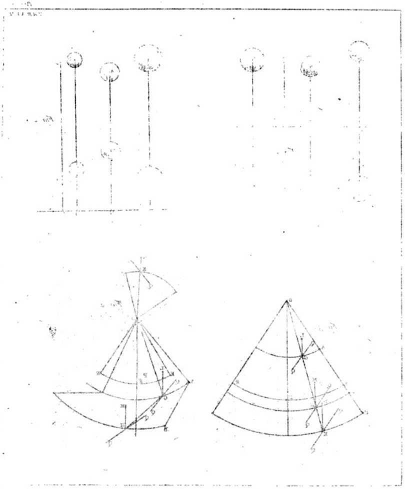
TAB. XIX. Fig. 1. 2.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A, B, C, suspensa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur d. Item ponderis A distantia A D, sit e; B D, f; C D, g. Ducendo itaque singula pondera in quadrata suarum distantiarum, erit productorum summa $aee + bff + cgg$. Et rursus, ducendo summam ponderum in distantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini si æqualis statuatur longitudo penduli simplicis F G, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi composito isochronum esse.

* Prop. 1. huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimissa librari, & in recta D E sumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oscillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium secabit. punctum vero L arcum illi similem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret similem arcum E I. Quod si in arcubus G M, N L, sumptis punctis quibuslibet, similiter ipsos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas esse ostendatur ponderis G in O, & puncti L in P; constabit inde æqualibus temporibus utros-

que



que arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo composito ex A, B, C, isochronum esse. Ostendetur autem hoc modo.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sit primo, si potest, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Constat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, simul centrum gravitatis E percurrere arcum similem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares sursum, quæ occurrant subtensis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur y. Unde, cum sit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde descendit altitudinem ascendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipsi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua ascenditur ad altitudinem P S. Dum vero L transit in P, simul pondera A, B, C, similes arcus percurrunt ipsi L P, nimirum A T, B V, C X. Estque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, sicut distantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita est altitudo ad quam illa celeritate ascendi potest, ad altitudinem quò hac celeritate ascendi potest *. Ergo etiam, ut quadratum distantiæ D L, quod est $x\,x$, ad quadratum distantiæ D A, quod est $e\,e$, ita est altitudo quo ascenditur celeritate puncti L, quum est in P, (quæ altitudo major dicta est quam P S sive y,) ad altitudinem quo ascenditur celeritate ponderis A in T; si nempe postquam in T pervenit, relicto pendulo, seorsim motum suum sursum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

* Prop. 3. & 4. part. 2.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam ascenderet pondus B, celeritate acquisita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam ascenderet pondus C, celeritate acquisita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis singulis alti-

R titu-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

titudinibus iſtis in ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + gg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quouſque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt R Q, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit;) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejuſdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem.

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Unde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex F G compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum

rum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, applicetur ad diſtantiam centri gravitatis communis ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum ipſorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli ſimplicis compoſito iſochroni.

Sint poſita eadem quæ prius, ſed pondera omnia inter ſe æqualia intelligantur, & ſingula dicantur *a*. Rurſus vero nulla eorum magnitudo conſideretur, ſed pro minimis habeantur, quantum ad extenſionem.

Itaque penduli ſimplicis iſochroni longitudo, per propoſitionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas diviſa ac dividens utraque per *a* dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo ſignificatur ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ab axe oſcillationis, applicata ad diſtantiam centri gravitatis omnium ab eodem oſcillationis axe, multiplicem ſecundum numerum ipſorum ponderum, qui hic eſt 3. facile enim perſpicitur numerum hunc, in quem ducitur diſtantia *d*, reſpondere neceſſario ipſi ponderum numero. Quare conſtat propoſitum.

Quod ſi pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta ſint, atque ex termino ejus ſuperiore ſuſpenſa; conſtat diſtantiam centri gravitatis, ex omnibus compoſitæ, ab axe oſcillationis, multiplicem ſecundum ponderum numerum, æquari ſummæ diſtantiarum omnium ponderum ab eodem oſcillationis axe*; ac proinde, hoc caſu, habebitur quoque longitudo penduli ſimplicis, compoſito iſochroni, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis ponderum ſingulorum ab axe oſcillationis, dividatur per ſummam earundem omnium diſtantiarum.

* Prop. 2. huj.

De centro oscillationis.

DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.

Tab. XXI. Fig. 1.

In schemate adjecto, est A B E C figura data; recta eam tangens M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F; cuneus autem figura solida planis A B E C, M F G, & parte superficiei, à recta E F descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

DIstantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

Tab. XIX. Fig. 3.

Nempe in figura eadem, si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero K I ad basin ejus A B E C perpendicularis ducta sit, & rursus I M perpendicularis ad M D; erit I M, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

CUneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis

lis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus.

Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam E E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem.

TAB. XIX. Fig. 4.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æquales quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta E E, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas G H ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam A D terminatis, quale est G K; quia horum altitudines ipsis distantiis G H æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonstrandum.

* Prop. 2. huj.

PROPOSITIO VIII.

SI figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod

nempe rectangulum fit à distantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

TAB. XIX. Fig. 4.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit L A cunei A B D subcentrica in rectam E E. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantiis particularum figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A E. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A E, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A*, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A*. Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; divisáque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, sicut à particula F ducta est F K. Oporteatque invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

Tab. xix. Fig. 5. 6.

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L sit recta G A, secans E D in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam A L, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D à figura distat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis

E A G,

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 2. huj.
* Prop. præced.

E A G, quia omnes F L æquales totidem G A *. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G *, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

TAB. XX. Fig. 1. 2.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc est, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum totidem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

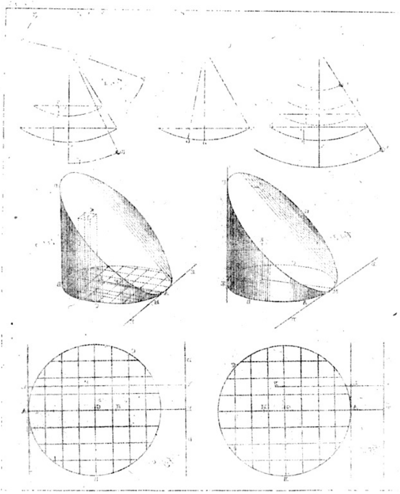
Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit A H; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum A L abscissi. Itaque A G unius casus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter se, ita in utroque casu cunei per A L abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abscissi, subcentricam.

PROPOSITIO X.

TAB. XX. Fig. 3.

P*ositis quæ in propositione præcedenti; si data recta* E D *transeat per* G, *centrum gravitatis*



tis figuræ A B C; *erit summa quadratorum à distantiis particularum, in quas figura divisa intelligitur, ab recta* E D, *æqualis rectangulo soli* A G H, *multiplici secundum ipsarum particularum numerum.*

Hoc enim manifestum est, quum nullum tunc sit quadratum E G.

PROPOSITIO XI.

TAB. XX. Fig. 4.

Positis rursus cæteris ut in præcedentium penultima; si D E *sit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales similesque portiones eam dividens, sitque insuper* V G *distantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, super ipsam abscissi per ipsam* E D, *subcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H.

Est enim rectangulum X G V, multiplex secundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex secundum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demissarum; hoc est, rectangulo A G H multiplici secundum eundem particularum numerum, ut constat ex propos. præcedenti. Unde sequitur rectangula X G V, A G H inter se æqualia esse. quod erat demonstrandum.

* Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; si ex centro gravitatis eorum circulus quilibet describatur;

 ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.

TAB. XX. Fig. 5.

Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F *f*, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

A L ∞ a	A K ∞ e	radius E F ∞ z
B M ∞ b	B O ∞ f	G S ∞ x
C N ∞ c	C P ∞ g	
D H ∞ d	D Q ∞ h	

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R*. Similiterque, divisâ in totidem partes summâ perpendicularium A K, B O, C P, D Q, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam G K, sive ipsa R G*. Itaque, si summa omnium A L, B M, C N, D H, sive $a + b + c + d$ vocetur l: summa vero omnium, A K, B O, C P, D Q, sive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, dato-

* Prop. 2. huj.

* Prop. 2. huj.

datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ; erit E R $= \frac{l}{\theta}$; & R G $= \frac{m}{\theta}$. Cumque G S sit x, erit R S sive F T $= x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si G R major quam G S; & semper quadratum F T $= xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato F E $= zz$, relinquetur quadratum T E $= zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde T E $= \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem E R $= \frac{l}{\theta}$. Itaque T R $= \frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ T R, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro summam quadratorum omnium F A, F B, F C, F D. Quadratum A F æquatur quadratis A V, V F. Est autem A V æqualis differentiæ duarum V K, A K, sive duarum S G, A K; ac proinde A V $= x - e$ vel $e - x$; & qu. A V $= xx - 2ex + ee$. V F vero æqualis est differentiæ duarum F S, V S sive duarum F S, A L; ac proinde V F $= y - a$ vel $a - y$; & qu. V F $= yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis A V, V F, fit quadratum F A $= xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum F B, F C, F D; atque omnia ordine disposita erunt hæc;

qu. F A $= xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. F B $= xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. F C $= xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. F D $= xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh = nn$; & quadrata $aa + bb, + cc + dd = kk$; erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h = m$, & $a + b + c + d = l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$ fiet $+ \theta yy = \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

vel $+\theta yy \propto \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx$ $xm - \frac{mm}{\theta}$.

$+2$ & $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Ac proinde, utroque caſu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta}$ $+\theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appoſitis reliquis quantitatibus, ſumma prædicta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota ſumma, nempe quadratorum F A, F B, F C, F D, $\propto \theta zz + nn + kk - \frac{mm + ll}{\theta}$. Quod apparet eſſe planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ ſint; ſemperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia ſumptum fuerit punctum F. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi puncta data diverſas gravitates habere ponantur, invicem commenſurabiles, ut ſi punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rurſus deſcribatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac ſingularum quadrata multiplicia ſumantur ſecundum numerum ponderis puncti ſui; ut quadratum A F duplum, B F triplum, C F quadruplum, D F ſeptuplum; dico rurſus ſummam omnium æqualem fore ſpatio dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum ſumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonſtratione, ſi imaginemur puncta ipſa multiplicia ſecundum numeros attributæ cuique gravitatis; quaſi nempe in A duo puncta conjuncta ſint, in B tria, in C quatuor, in D ſeptem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt.

Sit

Sit figura plana, vel linea in plano existens A B C, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, E C F. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XX. Fig. 6.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam E H, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura A B C divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam E D, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni *, quæ sit K L. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem secundum earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta cetnro D, quod est centrum gravitatis figuræ A B C, sive centrum gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam E D, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi K L.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. præced.

 Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F, figura suspendatur, eidem pendulo K L isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

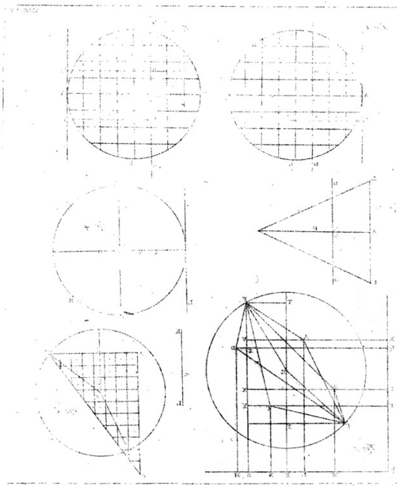
Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

TAB. XXI. Fig. 1. Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.

Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula dictarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per E G & E C; habebimus etiam huic æqualem summam

* 47. lib. 1. Eucl.



mam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Ut si linea R R sit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G; æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propos. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus, quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum

rum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z, nec non distantia indidem centri gravitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XV.

TAB. XXI. Fig. 1. & 2.

Isdem positis, si solidum A B C D *sit ejusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere est,* O Q P, *detur distantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut sectiones omnes*, N N, M M, *sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* E C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris*

ris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis B D à dicta linea in B, quæ sit B C; itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K.

Fig. 2.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in Δ, si fiat sicut Δ P ad P Φ, ita rectangulum B C K ad spatium quoddam Z; dico hoc ipsum, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, æquari summæ quæsitæ quadratorum, à distantiis earundem particularum à plano E C.

Quadrata enim à distantiis particularum planæ sectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis suæ transit; sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti B N N D à plano eodem, æquari constat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, si planæ sectionis N N distantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, sit N X; subcentrica vero cunei super ipsa abscissi, plano per eandem rectam, sit N F; erunt quadrata à distantiis particularum planarum sectionis N N à plano E C, sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipsarum sectionis N N, vel segmenti N M M N. Est autem B D divisa similiter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, sicut quadratum B D ad quadratum N N.

* Prop. 10 huj.

Est autem & numerus particularum sectionis B D, ad numerum particularum sectionis N N, sicut sectiones ipsæ;

 hoc

hoc est, sicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum sectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum sectionis N N, duplicatam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc est, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior summa quadratorum, à distantiis particularum segmenti B N N D à plano E C, ad summam alteram quadratorum, à distantiis particularum segmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione ostendetur, summas quadratorum à distantiis particularum in reliquis segmentis solidi A B C D, esse inter se in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ basi cujusque segmenti respondent. Quare summa quadratorum, à distantiis particularum omnium segmentorum solidi A B C D à plano E C, erit ad summam quadratorum, à distantiis particularum segmentorum totidem, maximo segmento æqualium, hoc est, cylindri vel prismatis B D S S, eandem cum solido A B C D basin altitudinemque habentis, sicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc est, sicut solidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui basin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem solidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi constat ex ratione planorum quorum conversione generantur, hoc est, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione distantiarum quibus horum planorum centra gravitatis absunt ab axe O P; hoc est, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem est quæ solidi A B C D ad cylindrum vel prisma B D S S, hoc est, eadem quæ numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, est eadem, ex constructione, quæ spatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta summa quadratorum, à distantiis omnium particu-

larum

larum solidi A B C D à plano E C, ad summam quadratorum, à distantiis omnium particularum cylindri vel prismatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum solidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, & ex ratione spatii Z ad rectangulum B C K: hoc est, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis est secundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel prismatis B D S S, æquale summæ quadratorum, à distantiis particularum ejusdem prismatis vel cylindri B D S S à plano E C; siquidem rectangulum idem B C K, multiplex per numerum particularum segmenti B N N D, æquatur quadratis distantiarum particularum ejusdem segmenti à plano E C*. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, summæ quadratorum, à distantiis particularum solidi ejusdem A B C D à plano E C*. quod erat demonstrandum.

* Prop. 10. huj.

* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando solidum A B D rotundum est circa axem A C, fieri semper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam subcentrica cunei, abscissi super circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Unde, si P V æqualis posita sit B C, sequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc est, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc est, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipsum rectangulum Δ P Φ, multiplex secundum numerum particularum solidi A B D, æquari summæ quæsitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iisdem cadunt in planum E C.

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum; si aliter atque aliter suspendatur, agiteturque super axibus inter se parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter distent, sibi ipsi isochrona est.

Tab. XXI. Fig. 3.

Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, sitque primo suspensa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oscillationis. In quo si centro E, radio E F, describatur circumferentia F H G, sumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo secundò suspendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oscillationis plano. Dico isochronam fore sibi ipsi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

Porrò

Porrò summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis *; & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 15. huj.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.

 Sit

DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XXII. Fig. 1.

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E, suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni*. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem secundum particularum numerum; sive, omissa communi multiplicitate, si planum H applicetur ad distantiam F E; orietur quoque longitudo penduli simplicis isochroni. Quam proinde ipsam longitudinem F G esse constat. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. huj.

PROPOSITIO XVIII.

Si spatium planum, cujus multiplex secundum numerum particularum suspensæ magnitudinis, æquetur quadratis distantiarum ab axe gravitatis, axi oscillationis parallelo; id, inquam, spatium si applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis ejusdem magnitudinis.

TAB. XXII. Fig. 2.

Esto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæ-

quæque suspensa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oscillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, parallelus. Divisaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, sit quadratis distantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe secundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad distantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem esse intervallo E G, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis magnitudinis A B C D.

De centro oscillationis.

Ut enim universali demonstratione quod propositum est comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adposita, O Q P; quæ nempe, secta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine A B C D, habeat segmenta intercepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent; sintque segmenta singula figuræ O Q P, divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod sit T, eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales esse distantias S T, F E.

Porrò autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni*; quæ longitudo posita fuit F G. Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis distantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto*. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis distantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ qua-

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. quadrata (si O sit punctum supremum figuræ O Q P, & O H subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia sunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis A B C D. Quadrata vero distantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcunque axis oscillationis F distet à centro gravitatis E, semper eadem sunt: quæ proinde putemus æquari spatio Z, multiplici secundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oscillationis F, æquantur istis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; si applicentur hæc omnia ad distantiam F E sive S T, orietur longitudo F G penduli isochroni magnitudini A B C D*. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus suum S T, orietur ipsa S T, sive F E. Ergo reliqua E G est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare superest ut demonstremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim constabit, etiam planum I, applicatum ad distantiam F E, efficere longitudinem ipsi E G æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum O T H, multiplex secundum numerum particularum figuræ O Q P, sive magnitudinis A B C D, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi S F parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis A B C D, à plano horizontali K K, ducto per centrum gravitatis E; cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis A B C D à plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano F E, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E, qui

* Prop. 10. huj.

qui sit axi F parallelus *. Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo O T H & plano Z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

Sive enim magnitudo A B C D suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia E Y, erit ipsa æqualis E G; & tota Y L æqualis G F; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum

TAB. XXII. Fig. 1.

V

DE CENTRO OSCILLATIONIS. mum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A.

Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, qua nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

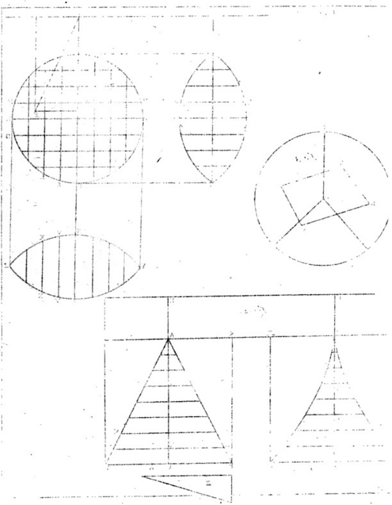
TAB. XXII. Fig. 3.

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspensionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

PROPOSITIO XXI.

Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in



in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.

Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut figura B C D circa axem E F; hic, si cuneus super figura intelligatur abscissus, plano quod ita secet planum figuræ, ut intersectio, quæ hic est D D, sit parallela oscillationis axi; deturque distantia centri gravitatis figuræ ab hac intersectione, ut hic A D; itemque subcentrica cunei dicti super eadem intersectione, quæ hic sit D H. Habebitur centrum oscillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad distantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis. Est enim rectangulum D A H, multiplex secundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis distantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravitatis A parallela ducitur axi oscillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad distantiam F A, orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis A *.

TAB. XXII. Fig. 4. & 5.

* Prop. 16 huj.

* Prop. 18 huj.

Hinc manifestum est, si axis oscillationis sit D D, fieri centrum oscillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli simplicis isochroni figuræ B C D, esse tunc ipsam subcentricam cunei, abscissi plano per D D, super ipsam D D. Quod unum ab aliis ante animadversum fuit, non tamen demonstratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum super figuris planis inveniantur, persequi non est instituti nostri, & jam in multis nota sunt. Velut, quod si figura B C D sit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{4}$ diametri. Si rectangulum, erit D H ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, seu linea gravitate prædita, altero capite suspensa, isochrona sit pen-

 dulo longitudinis subsesquialteræ. Considerando nempe lineam ejusmodi, ac si esset rectangulum minimæ latitudinis.

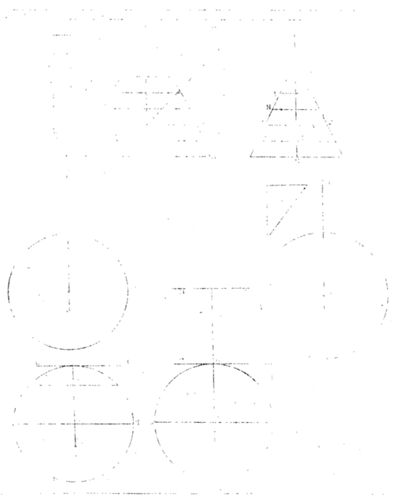
Quod si figura triangulum fuerit, vertice sursum conversо, fit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorsum, $\frac{1}{2}$ diametri.

Quod autem propositione 16. demonstratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere sciendum. Nempe, si aliam atque aliam positionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli isochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propositione illa manifestum est.

TAB. XXIII. Fig. 1. & 2. Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut si figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam habenda est summa quadratorum a distantiis particularum omnium ab recta quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oscillationis parallela; secundum ea quæ prop. 18. exposita fuere. Hoc est summa quadratorum a distantiis ab ipso A centro gravitatis, quoniam figura plana est. Sive etiam summæ quadratorum a distantiis tam ab recta B A C quam ab recta D A. Constat enim quadratum rectæ O A, quam pono esse distantiam unius cujusdam particulæ a centro A, æquari quadratis distantiarum O N, O V, quibus eadem particula abest a rectis B A C, D A *. Atqui summa quadratorum a distantiis ab recta B A C æquatur rectangulo D A H, si D H sit subcentrica cunei super figura abscissi per tangentem D D, parallelam B A *. item summa quadratorum a distantiis ab recta D A æquatur rectangulo B A L, si B L sit subcentrica cunei abscissi per tangentem B D parallelam A D. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, subcentricamque H D cunei prioris, etiam subcentricam L B cunei posterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ simul sumpta faciunt hic spatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oscillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad distantiam F A,

* Per 47. lib. 1. Elem.

* Prop. 10. huj.



F A, dabit distantiam A K, qua centrum oscillationis K inferius est centro gravitatis A.

De centro oscillationis.

Si vero F A sit axis figuræ B C D, potest, pro cuneo abscisso per B D super figura tota, adhiberi cuneus super figura dimidia D B M abscissus plano per D M. Nam, si cunei hujus subcentrica super D M sit O A; distantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M sit N A, æquale esse constat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, constituet quoque planum applicandum ad distantiam F A, ut fiat distantia A K.

TAB. XXIII. Fig. 1.

* Prop. 14. huj.

Et horum quidem manifesta est demonstratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia secundum numerum particularum figuræ, æqualia sint quadratis distantiarum à centro gravitatis A; sive, quod idem hic est, ab axe gravitatis axi oscillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad distantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *.

* Prop. 12. huj.

Centrum oscillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter se æqualia esse liquet, simulque efficere semissem quadrati à semidiametro. Unde, si fiat ut F A ad semidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit distantia A K, à centro gravitatis ad centrum oscillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia sumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in sequentibus figuris planis centra oscillationis quæsivimus, quæ simpliciter adscripsisse sufficiet. Nempe,

Centrum oscillationis Rectanguli.

In rectangulo omni, ut C B, spatium applicandum, sive rectangulum oscillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à semidiagonio A C. Unde sequitur, si rectangulum

TAB. XXIII. Fig. 3.

ab aliquo angulorum suspendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi isochronum esse $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli isoscelis.

TAB. XXIII. Fig. 4.

In triangulo isoscele, cujusmodi C B D, spatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigesimæ quartæ quadrati baseos C D. Unde, si ab angulo baseos ducatur D G, perpendicularis super latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; sitque A centrum gravitatis trianguli; divisoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipsi B A; erit B K longitudo penduli isochroni, si triangulum suspendatur ex vetrice B. Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo penduli isochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse.

Centrum oscillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cumque parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque insuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

TAB. XXIII. Fig. 5.

In circuli sectore B C D, si radius B C vocetur r: semi arcus C F, p: semisubtensa C E, b: fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2} rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc est, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim B A $\propto \frac{2br}{3p}$. Si autem suspendatur sector

ex

ex B, centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium B F ut arcus C F D ad subtensam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum; tum illius qui super sectore toto abscinditur, plano ducto per B K parallelam subtensæ C D, cujus cunei subcentricam super B K invenimus esse $\frac{3}{8} r - \frac{3}{8} a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a sinum versum E F; tum illius qui super dimidio sectore B F C abscinditur plano per B F, cujus nempe cunei subcentricam super B F invenimus $\frac{3}{8} b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sed & alia via, sectoris centrum oscillationis, facilius invenitur, quæ est hujusmodi. Intelligatur sectoris B C D pars minima sector B C P, qui trianguli loco haberi potest. Quadrata autem, à distantiis particularum ejus à puncto B, æqualia sunt quadratis distantiarum ab recta B R, bifariam sectorem dividente, una cum quadratis distantiarum ab recta B Q, quæ ipsi B R est ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data est major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda sunt.

TAB. XXIII. Fig. 6.

Posità vero B O duarum tertiarum B R, hoc est, posito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R: ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo B C P abscissi plano per B Q. His positis, constat quadrata, à distantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris B C D, sicut sector B C P ad sectorem B C D, hoc est, sicut numerus particularum sectoris B C P, ad numerum particularum sectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod sector B C D dividatur in sectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex secundum

nume-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. numerum particularum sectoris B C D, æquale erit quadratis distantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, distantiam inter suspensionem & centrum gravitatis sectoris, dabit longitudinem penduli isochroni, cum sector ex B suspenditur *. Est autem rectangulum N B O $\infty \frac{1}{2} rr$: distantia autem B A, ut jam ante diximus, $\infty \frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli isochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Prop. 17. huj.

Centrum oscillationis Circuli, aliter quam supra.

TAB. XXIV. Fig. 1.

Eodem modo etiam simplicissime, in circulo, centrum oscillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; sectorque in eo minimus intelligatur B C P, sicut ante in sectore B C D.

Cum igitur, secundum modo exposita, quadrata, à distantiis particularum sectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc est, dimidio quadrato radii, multiplici secundum sectoris ipsius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi sectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à distantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici secundum numerum earundem circuli particularum.

Est autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit spatium applicandum distantiæ inter suspensionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oscillationis inferius est ipso centro B *. quod & supra ita se habere ostendimus.

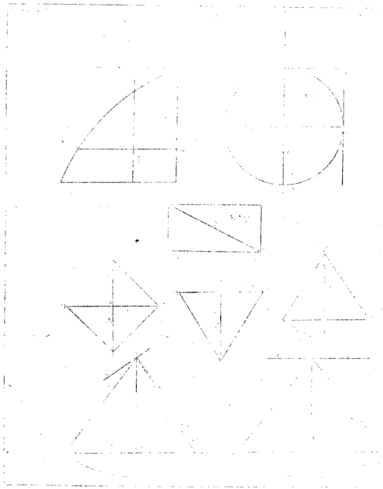
* Prop. 18. huj.

Centrum oscillationis Peripheriæ circuli.

TAB. XXIV. Fig. 2.

Facilius etiam, centrum oscillationis circumferentiæ circuli, hoc pacto reperitur. Esto enim circumferentia descripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex secundum numerum particularum in quas circumferentia divisa intelligitur, æquatur quadratis à distantiis omnium

earum



earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic ſpatium applicandum*. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro G F.

De centro oscillationis.

* Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum iſochronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris.

TAB. XXIV. Fig. 1.

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis A B.

TAB. XXIV. Fig. 4.

Ponatur A B ∞ a, ductâque C D, quæ ſecet A B ad angulos rectos in E, ſit A E indeterminata ∞ x: E C vel E D ∞ y. Ergo quadratum A C ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe ſuſpenſionis A. Ergo quadratum A C, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam A E, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni*; quam propterea oportet æqualem eſſe A B ſive a. Itaque $\frac{xx+yy}{x}$ ∞ a. Et yy ∞ $ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cu-

* Prop. 17. huj.

jus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $= \frac{1}{2} a$, five F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

TAB. XXIV. Fig. 5. Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis $\frac{1}{3}$ O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam A N $= a$: A M $= x$: M O vel M L $= y$. Est ergo rectangulum O M R $= \frac{1}{3} yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O L esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{yy}{3x} + x = a$. Unde $y = \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius A N triplum.

Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O L parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas

nas habeat pendulo simplici A N, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi A N pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abscindetur.

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

Sit virga A B ponderis expers, suspensa ex A; oporteatque, ad datum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, sive infinite parvi existimandi, quæque, ita suspensa ab A, oscillationes isochronas faciant pendulo simplici datæ longitudinis A L. TAB. XXIV. Fig. 6.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo $AB \infty a$; $AL \infty b$; $BG \infty x$; $CG \infty y$: invenitur æquatio $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{4}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$ ex qua patet, bases triangulorum C, & D, quæ bases hic ut puncta considerantur, esse ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus simplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod si a sit nihilo æqualis, hoc est, si punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, sit idem cum puncto A; tum futura sit æquatio $y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc casu, si sumatur A O $\infty \frac{2}{3}b$, hoc est, $\infty \frac{2}{3}$ A L, centroque O per A circulus describatur A D N; erunt bases triangulorum A C, A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutissima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D constituuntur, magnitudine & situ sibi respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, posita A L $\infty \frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifestum est, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oscillationis esse in L. TAB. XXV. Fig. 1.

Rursus, si in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, seu TAB. XXV. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. $2a \propto b$; hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L secet bifariam, erit $y \propto \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum B A, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum B C, B D, quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum L.

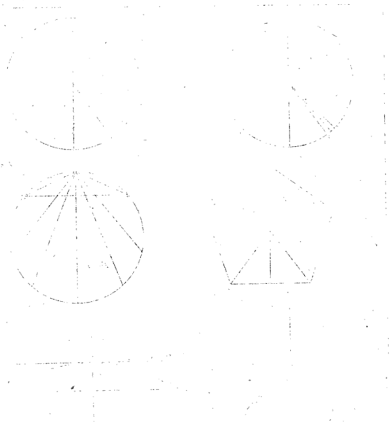
Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, à centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

TAB. XXV. Fig. 3. & 4. Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y \propto \sqrt{2ab - 2aa - \frac{2}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars sui tertia E F; eritque F centrum describendi circuli; radius autem F O æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentiæ quadratorum A E, E F.

Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangula duo paria acutissima constituantur, ut B C, B D, illorum, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L. Quare & portionis cujuslibet descripti circuli, cujus portionis vertex sit in B, axis vero in recta A L, quales sunt utraque C B D; posita suspensione ex A; centrum oscillationis idem punctum L esse constat. Atque adeo etiam circuli segmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertisse sufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oscillationis figurarum rectarum, seu quæ æqualiter ad axem utrinque constitutæ sunt; ut trianguli isoscelis, vel parabolicæ sectionis rectæ; etiam obliquarum,

quæ



quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli scaleni, & parabolæ non rectæ, centra oscillationis haberi. Ut si, exempli gratia, triangulum B A C isosceles, cujus axis A D, à puncto E suspensum intelligatur; sit vero & aliud triangulum scalenum F A G, axem eundem habens A D, & basin F G æqualem basi B C; etiam hoc triangulum, ex E suspensum, priori B A C isochronum esse dico.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XXVII. Fig. 1.

Quia enim virga, seu linea gravis, F G, affixa virgæ sine pondere E D in D, situ obliquo, suspensaque ex E, isochrona est virgæ B C, similiter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem A D secant in iisdem punctis, atque inter se æquales sunt: necesse est tota triangula, quæ ex lineis, seu virgis iisdem composita intelligi possunt, isochrona esse. In aliis figuris similis est demonstratio.

* Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

Quomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum A B C, suspensum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis sit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiis particularum solidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc est, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis; rectangula hæc applicata ad distantiam E F, qua nempe axis suspensionis distat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

TAB. XXV. Fig. 5.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Centrum oscillationis in Pyramide.

TAB. XXVI. Fig. 1.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, basin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

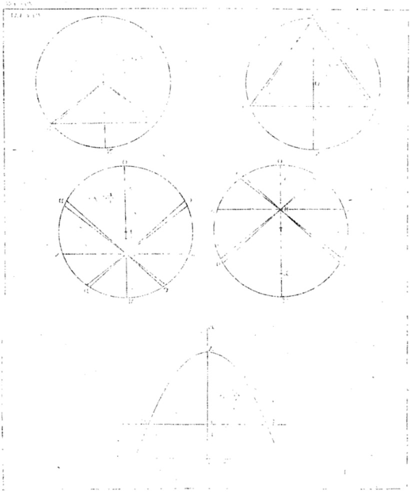
Hic figura plana proportionalis O V V, à latere apponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis O P V, quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur semiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V; distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.

Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F; inventâque subcentricâ cunei, super figura O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano N E, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

* Prop. 10. huj.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadratâ basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit B K; estque $\frac{2}{3}$ B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ sit Φ P; estque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod est $\frac{1}{3}$ quadrati B C, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum nu-



numerum particularum solidi A B C, æquale quadratis distantiarum à plano A D*. Apparet autem, fieri spatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 15. huj.

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{5}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda, A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque insuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionialis.

Centrum oscillationis Coni.

Quod si A B C conus fuerit, omnia eodem modo se habebunt, nisi quod spatium Z hic sit æquale rectangulo Δ P Φ *, hoc est $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, sive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum spatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{5}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, posita suspensione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius est centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$ A D, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. sive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifestum est, si A D, D B æquales sint, hoc est, si conus A B C sit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D.

* Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propositione 20, conum hunc rectangulum, si ex D centro baseos suspendatur, isochronum fore sibi ipsi ex vertice A suspenso, quemadmodum & de triangulo rectangulo supra ostensum fuit.

Centrum oscillationis Sphæræ.

Si A B C sit sphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis composita, quarum basis communis O H, æqualis sphæræ diametro A D. Sectâ vero sphærâ planis per centrum E, quorum B C sit hori-

TAB. XXVI. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur summa quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda est distantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ sit Φ P, estque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, divisâ P V bifariam in Δ, constat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum sphæræ A B C, æquari quadratis distantiarum à plano A D *. Est autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano B C, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphæra A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, si sphæra suspensa sit ex puncto in superficie sua A, erit E S, à centro sphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ semidiametri A E. Totaque A S æqualis $\frac{7}{10}$ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut L, sphæra suspensa sit; erit E S æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.

Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si cylindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{3}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si à puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni $\frac{3}{4}$ axis, cum $\frac{1}{2}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum $\frac{1}{2}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Cen-

Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri potest. Si enim, exempli gratia, sit conoides cujus sectio per axem, hyperbola B A B; axem habens A D, latus transversum A F: erit figura plana ipsi proportionalis B K A K B, contenta basi B B, & parabolicæ lineæ portionibus similibus A K B, quæ parabolæ per verticem A transeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus transversum A F, ac parallelum basi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum distat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; estque axis A D ad A L, sicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum sesquialtera A D. Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura B K A K B, abscissi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei subcentrica, super ipsa A P, inveniri quoque potest; atque ex his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspensione; dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, si axis A D lateri transverso A F æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati A D, cum $\frac{11}{100}$ quadrati D B. Tunc autem A L est $\frac{7}{10}$ A D.

Unde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, invenitur longitudo penduli isochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{11}{70}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

Centrum oscillationis dimidii Coni.

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut si sit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum semicirculi baseos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum est, quoniam A D est $\frac{1}{2}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, sicut quadrans circumferentiæ circuli

Tab. XXVI. Fig. 1.

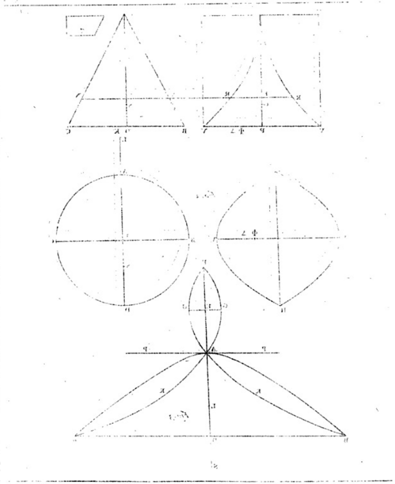
Tab. XXVII. Fig. 1.

ad radium, ita sint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E est centrum gravitatis semicirculi baseos, ideoque in A E centra gravitatis omnium segmentorum semiconi A B D, basi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem est quæ in cono toto supra descripta fuit: per quam nempe invenietur summa quadratorum, à distantiis particularum semiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata distantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, sicut supra prop. 14. adhibenda est, cujus nempe sectiones verticales, exhibeant lineas proportionales sectionibus sibi respondentibus in semicono A B C. & hujus figuræ cognoscenda est distantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem esse constat distantiæ D N, centri gr. semiconi à plano trianguli A B. positâque H G subcentricâ cunei abscissi super figura S Z Y, ducto plano per S Y, noscendum est rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, secundum numerum particularum semiconi A B C, æquabitur quadratis distantiarum semiconi in planum M D O. Licebit vero cognoscere rectangulum illud G F H, etiamsi subcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus supra, cum de cono ageremus, quadrata distantiarum à plano per axem ejus, æquari $\frac{1}{20}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{1}{5}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{1}{5}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{1}{5}$ quadrati B C. Ponendo autem A B $= a$; B C $= b$; & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, $= q$; fit E B $= \frac{2bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F $= \frac{bb}{2q}$.

Cujus



Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{16}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H ∞ $\frac{3}{16} bb - \frac{b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano M D O. At quadratis distantiarum à plano N D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, sive $\frac{3}{80} aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80} aa + \frac{3}{16} bb - \frac{b^4}{4qq}$.

De centro oscillationis.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cunei super ipsa abscissi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{16} bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{bb}{2q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{8} q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerunt A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

TAB. XXVII. Fig. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit.

TAB. XXVII. Fig. 3.

Ut hoc expediamus, primo penduli ipsius, ex virga gravitate prædita, & appenso parte ima pondere, compositi, centrum oscillationis inveniendum est.

Sit virga, cum appenso pondere, A C, cujus longitudo dicatur a. Intelligantur autem, tum virga ipsa, tum pondus appensum C, in particulas minimas æquales divisa, earumque particularum virga habeat numerum b, pondus vero C numerum c, ponendo nempe b ad c, sicut gravitas virgæ ad gravitatem appensi ponderis. Longitudo igitur penduli simplicis, dato isochroni, habebitur, si summa quadratorum à distantiis particularum omnium à puncto suspensionis A, dividatur per summam earundem distantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T sit dupla T C. Quia ergo M est centrum gravitatis lineæ A C, & A T subcentrica cunei super ipsa abscissi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hic revera triangulum est; erit summa quadratorum, à distantiis particularum virgæ à puncto A, æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc est, rectangulo T A M, multiplici secundum numerum particularum b; hoc est, $\frac{1}{3} aab$; quia M A est $\frac{1}{2} a$, & T A $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum T A M $= \frac{1}{3} aa$. Summa vero quadratorum, à distantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis; hoc est, aac. Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3} aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

Porro, distantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2} ba$; longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ

est

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

est a, multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, sunt $a\,c$. Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ sive $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli isochroni. Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem A C, à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum consideretur.

TAB. XXVII. Fig. 4.

Quod si jam, præter pondus C, alterum insuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d: distantia vero A D sit f. Ut pendulum simplex huic ita composito isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet esse dff. Adeo ut summa omnium jam sit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac summa proinde distantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba + ca + df$; per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli isochroni.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, datæ æqualis postuletur, quæ sit p, & reliqua omnia quæ prius data sint, præter distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \infty pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Et $f \infty \frac{1}{2}p$

De centro oscillationis.

$+$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{3}aab-aac}{d}}$. Ubi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp+cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}aab+aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Unde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}abp+acp-\frac{1}{3}aab-aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}\frac{abp+acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{1}{3}\frac{aab+aac}{d}$. Unde non debebit esse minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{1}{3}bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab+2ac}{d}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}\frac{abp+acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{1}{3}\frac{aab+aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \infty \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{1}{3}bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab+2ac}{2d}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{7}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eadem ponatur quæ ipsius virgæ,

gæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440; invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf+cf}{\frac{1}{3}b+c} \infty a$. poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, $a \infty 1444\frac{4}{13}$. longitudo virgæ.

Jam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp+acp-\frac{1}{3}aab-aac}{d}}$, fiet $f \infty \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9,

à

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

à centro oscillationis penduli compositi sursum sumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p*: easque subjecta tabella exhibemus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex. gr. si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentiâ 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii spatio 24 horarum. *Scrup. pr. Sec.*	Partes, à centro osc. sursum accipiendæ. *Lineæ & decimæ linearum pedis horarii.*
0, 15	7, 0
0, 30	15, 2
0, 45	23, 7
1, 0	32, 6
1, 15	41, 9
1, 30	51, 7
1, 45	62, 2
2, 0	73, 4
2, 15	85, 6
2, 30	99, 0
2, 45	114, 1
3, 0	131, 8
3, 15	154, 3
3, 30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis C partibus 1, 4.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκρίβειαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse

est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphæra penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Unde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

De mensuræ universalis, & perpetuæ, constituendæ ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi

modi horologium, fixarum ſtellarum obſervationibus, compoſitum fuerit, methodo illa quam in horologii deſcriptione oſtendimus: aliud pendulum ſimplex, hoc eſt, ſphæra plumbea, aut alia materia gravi conſtans, ex tenui filo religata, juxta ſuſpendenda eſt, motuque exiguo impellenda; ac tantiſper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recurſus ejus, per quadrantem horæ, aut ſemiſſem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oſcillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, ſatis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ menſurâ diſtantiæ, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis penduli ſimplicis; eâque, ſi recurſus ſinguli ſcrupula ſecunda valeant, in tres partes diviſâ; facient hæ ſingulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in ſuperioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non ſolum ubique gentium conſtitui poſſit, ſed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, ſemel ad hunc proportionibus ſuis expreſſi, certò quoque in poſterum cognoſci poſſint. Sicut jam ſupra, pedem Pariſienſem ad hunc horarium eſſe diximus, ut 864 ad 881; quod idem eſt ac ſi, poſito prius pede Pariſienſi, dicamus tribus hujuſmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, conſtitui pendulum ſimplex, cujus oſcillationes ſcrupulis ſecundis horariis reſponſuræ ſint. Pes autem Pariſienſis ad Rhenanum, quo in Patria noſtra utuntur, ſe habet ut 144 ad 139; hoc eſt, quinque lineis ſuis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas menſuras accipiunt.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quomodo autem centrum oſcillationis in ſphæra, ex qualibet longitudine ſuſpenſa, inveniatur, in ſuperioribus demonſtratum eſt. Nempe, ſi fiat ut diſtantia inter punctum ſuſpenſionis & ſphæræ centrum, ad ſemidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorſum acceptas, terminari in quæſito oſcillationis centro. Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem. Nam, ſi à pun-

cto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa mensura penduli cujus recursus secunda scrupula metiantur; sed quo major erit ejus sphæra, hoc minor invenietur mensura illa, inter centrum sphæræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in isochronis pendulis, centra quidem oscillationis à punctis suspensionum æqualiter distant; amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphæræ majoris, quam minoris.

Hinc necesse fuit illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuræ universalis constituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii nostri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Moutonus; his, inquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel mensura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc posteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: etsi scio vix sensibilem errorem fore, dummodo sphæræ istam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem posset quidem aliquo pacto res explicari; sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis adhibendo, certam rationem sequi, nullisque præter necessitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus sphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occursu aëris minus impediantur.

Cæterum, non sphæræ tantum ex filo suspensæ, sed & coni, cylindri, aliaque omnia solida, planaque, quorum centra oscillationis superius exhibuimus, ad hanc mensuram investigandam, apta sunt; quoniam, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus isochronis pendulis est intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ secunda scrupula aut eorum semisses singulis penduli recursibus

recursibus indicant, ad hæc usurpare possumus; sed & aliâ quæcunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 3. Part. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ſit longitudo. Itaque & pendulorum ſimplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oſcillationes minimæ tranſiguntur.

Quod ſi quis oſcillationum numerandarum, quæ horæ aut ſemihoræ tempore tranſeunt, laborem non defugiat; horologiumque adſit, cujus index ſecunda ſcrupula demonſtret; quæcunque accipiatur penduli ſimplicis longitudo, ejus numerus oſcillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoſcetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad ſecunda ſcrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc menſuram quicunque hactenus inveſtigarunt, experimenta conſulere neceſſe habuerunt; quibus, prout hactenus inſtituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, ſub finem motus acquiſitam. Ex noſtra autem prop. 25, de Deſcenſu gravium, cognitaque longitudine penduli ad ſecunda ſcrupula, abſque experimento, per certam conſequentiam, rem expedire poſſumus. Ac primo quidem ſpatium illud inquiremus, quod unius ſcrupuli ſecundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad ſecunda ſcrupula, longitudinem diximus eſſe pedum Horariorum 3: tempus autem unius oſcillationis minimæ, eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc eſt, ut 355 ad 113: ſi fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius ſecundi ſcrupuli, ſive ſexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus deſcenſus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum

modum superiori propositione fuit ostensum. Ergo, si fiat ut quadratum ex $19'' \frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60''$, hoc est, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo descensus perpendicularis, tempore unius secundi. Cum autem pes Horarius sit ad Parisiensem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc mensuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratissimis experimentis nostris prorsus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo casus finitur, non aurium aut oculi judicio discernitur; quorum neutrum hic satis tutum est; sed spatium descendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, absque ullo errore cognoscitur.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, suspensi dimidia oscillatio moram temporis, cadendo absumpti, indicat. Cujus sphærula, ut eodem momento ac plumbum casui destinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, casuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad parietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile sequi possit, rectáque secundum longitudinem suam descendere; eo loci transiens, quo penduli sphæra ad tabulam accidet. Absumpto igitur funiculo toto, pars insuper regulæ deorsum trahitur à cadente plumbo, priusquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta sit pars, sphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem signans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, spatium cadendo emensum certò definitum habetur.

Aëris autem occursum, quasi nullus esset in his intelligimus, ut mensura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte consentiat. Nec sane tantus est ille, ut in altitudinibus his, quò ascendere datur, sensibile discrimen inducere possit; dummodo solida corpora è metallo, aut, si levio-

leviore materia constent, mole grandiuscula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem secant, ita magnitudine corporis pensatur, ut sphæra lignea, vel etiam è subere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni suberisve gravitatem. Tunc enim gravitates sphærarum erunt inter se sicut earum superficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum sensu percipi potest, decidant corpora, quæ multum intrinseca gravitate differunt, nequaquam opus est ut proportio illa diametrorum servetur. Possunt enim inter se æqualia esse, dummodo utraque satis magna sint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum est, tantam vel altitudinem esse posse, vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in superioribus demonstravimus, proportione plurimum recessura sit. Namque in universum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac superficiei suæ, constitutus est; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam possit. Quæ nempe celeritas ea est, quam si aër, aut liquor ille sursum tendens, haberet, suspensum corpus idem sibi innatans sustinere posset. Verum de his, alias fortasse, pluribus agendi occasio erit.

HORO.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUINTA.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem faciliorem que. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumen-

SECUNDI HOROL. 9-GII DE-SCRIPTIO.

to plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata *.

* Vide Auctoris Opera posthuma p. 401. & seq.

Horologii secundi constructio.

TAB. XXVII. Fig. 5.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus facile ordinari, variisque modis mutari possit; sed eam partem explicari satis esse, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expressa est.

Axis D H ad horizontem erectus intelligendus est, ac super polis duobus mobilis. Huic ad A affixa est lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque secundum lineam A B; quæ est paraboloides illa de qua ostendimus, Propos. 8. partis 3, evolutione ejus, postquam ipsi recta quædam juncta fuerit, describi parabolam. Ea recta hic est A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E descriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola describitur, est B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in sese vertitur, filum B G F, in rectam lineam extensum, sphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoresve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: sed ita, ut omnes in superficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipso æqualia semper circuitus tempora evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu postea dicemus, apparebit.

Quod si circuitus singulos, secundorum scrupulorum semisses notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F esse $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii nostri, hoc est dimidium lon-

longitudinis penduli, cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{16}{27}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero secunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, quadrupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea A E.

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Porro, etsi filum B G F veluti unicum ac simplex hactenus designavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori duplex sit, ac F versus in angulum coeat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta esse debet, quanta isti filorum divaricationi sufficit; vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, absque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, si unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo nisu, motum sphæræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis K H revolutionem esse oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam si, parte sui ima, durato chalybe constet, suppositamque habeat adamantis superficiem planam; cujus minima quævis particula hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata fervetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, experti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA

ex motu circulari, Theoremata.

I.

SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri.

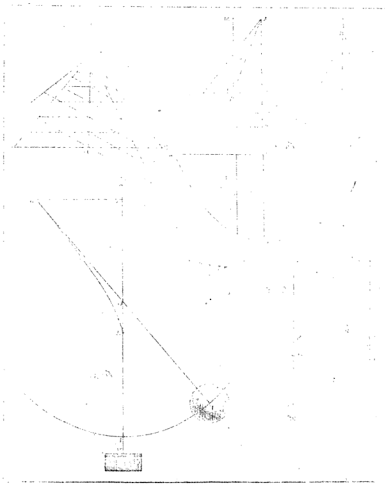
II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, sed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

IV. *Si*



IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in ſubdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem; hoc eſt, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo ſuſpenſum eſt.

VI.

In cava ſuperficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

De vi Centrifuga.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X. *Si*

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

X I.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII. *Si*

XIII.

Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maxima agitetur; hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.

F I N I S.

BREVIS
INSTITUTIO
DE USU
HOROLOGIORUM
AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

Adr. Metius in Geographicis Institutionibus Cap. 4.

ET hæc sane facillima & aptissima est methodus *(scilicet qua adhibitis Horologiis longitudines deteguntur)* quam acquirere possis ; nisi quod difficultas & error consistat in irregulari Horologiorum motu : ideoque diligentes inquisitores & inventores rerum naturalium id curate, neque laboris vestri vos pæniteat, quo hunc errorem tollere tentetis. Inquirite in hunc verum & æquabilem naturæ cursum ; quo potiti verum lapidem Philosophorum invenistis, neque fortes Naucleri ad scopulos toties offendent.

Fournier in Hydrographia l. 12. C. 35.

UNde tandem colligo , si via inveniri queat ad Horologia perficienda, & laborem suscipere velimus iis bene utendi , nullam praxim *(ad inveniendas longitudines)* cum hac comparandam esse.

Didericus Rembrantz a Nierop in Animadversionibus de inveniendis longitudinibus.

HOc modo laudabiliora censerem nova excogitata Horologia Domini Christiani Hugenii a Zuylichem , quæ, loco liberamenti , a plumbo pendulo oscillato moderantur , de quibus per certa testimonia certus sum , quod hæc tempus exacte ad hebdomadas , imò ferè ad menses juste dimetiri queant ; Unde confiderem , quod ope horum Horologiorum maximum perciperemus commodum , imò quod, nisi agitatio navis impediret , satis attingere possemus ad inventionem longitudinum.

BREVIS INSTRUCTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

I.

AD minimum bina nova Horologia Oscillatoria in navem ferantur: ut si alterutrum forte fortunâ vel ex negligentia quiescat; vel si diuturnitate temporis contractis sordibus, purgandum sit, alterum nihilominus moveatur; præstaret autem 3 vel 4 adhibere horologia.

I I.

Cui cura horologiorum committetur, discat a fabro quæ spectant indices horarum minutarum primarum & secundarum, internas etiam horologiorum partes intelligere, & reducendi ea methodum.

I I I.

Horologia in navi suspendenda sunt in loco arcte clauso, ubi tuta sunt ab humore vel sordibus, & ne disturbentur contactibus: Et si locum illum in media navi prope malum principem ordinare possemus, multum præstaret, quoniam ibi motus minimus est.

I V.

Antequam horologia in navem inferantur, conabimur ea aptare ad rectam dierum mensuram, tum enim usus est facillimus, nullusque fabris labor est ad unum bene adaptatum horologium alia accommodare. Sed si tamen tempus vel opportuna id præstandi occasio defuerit, nihilominus poterunt æque certe mari usurpari, dummodo observaveris vel scias, quanto citius vel tardius spatio 24 horarum moveantur, ut postea docebitur.

V.

Reducere horologia ad rectam dierum mensuram vel cognoscere quanto citius vel tardius spatio 24 horarum moveantur.

Observa, dies ab una ad alteram meridiem aliquantulum differre quæ causa est cur horologium, licet prorsus exactum & secundum mediorum dierum mensuram moveatur, non semper cum sole conveniat. Sed ut hæc inæqualitas æquetur, & semper ope Horologii scire possimus, quam horam indicat Sol, & consequenter num horologium ad rectam mediorum dierum mensuram dispositum sit, conducit sequens tabula cujus usus talis est. Quando primum horologium constituendum est, subtrahe ex hora solari observatâ æquationem ejus diei quæ in tabula reperitur, & dispone horologium ad residuas horas, minuta prima & secunda: ubi post aliquot dies quæritur hora solaris, adde ad horam horologii æquationem diei ultimi, & aggregatum erit hora solaris, si horologium exacte fuit adaptatum, secundum mensuram dierum mediorum; verum ut hæ observationes quam certissime instituantur, & horologia ad mensuram adaptentur antequam in navem inferantur, methodus sequens aptissima est.

Duc lineam meridianam in pavimento, cujus operationis methodi satis notæ sunt; observandum præterea summam hic non requiri exactitudinem; Porro, directe super lineam meridianam, suspende 2 fila appensis infra ponderibus, vel aliter verticaliter tendantur, certosque a se mutuò distent pedes, quo plures eo melius.

Ubi dein medietas solis videtur exacte ex adverso amborum filorum (ad quod requiritur vitrum obscuri coloris, vel in fuligine candelæ denigratum) eo momento horologiorum indices disponendi sunt, non exacte in 12 horas, sed tanto magis retrorsum, quanta est æquatio illius diei in Tabula: ex. gr. si fuerit 22 dies Martii, cujus æquatio in Tabula est 8 min. 3 sec: hæc sunt subducenda ex 12 horis, & residuum erit 11 horæ 51 min. 57 sec: in quot horas minuta & secunda disponendi sunt indices Horologiorum quam primum sol medius

dius ex adverso 2 filorum conspicitur. Dein post aliquot dies observatio rursus eodem modo est instituenda, ubi sol ex adverso filorum cernitur, & similiter notanda hora minuta & secunda horologiorum, quibus adde æquationem ejus diei excerptam ex Tabulâ, & si aggregatum exacte componat 12 horas Horologium ad rectam mensuram accommodatum est. Si vero differat dividenda sunt minuta & secunda istius differentiæ, per numerum dierum inter utramque observationem, ad obtinendam quotidianam differentiam.

Supponamus hanc secundam observationem fieri 30. Martii scil. octo diebus post primam & comperiatur medietate solis visa in meridiano ex adverso 2 filorum,

	h.	m.	s.
horologium indicare	11.	51.	7.
Æquatio 30. Martii in tabula est	0.	10.	40.
Quæ addita horæ ostensæ per horologium præbet summam	12.	1.	47.

Si hæc summa exacte fuisset 12 horarum, horologium recte dispositum fuisset, sed cum excedat 12. horas 1. minuto 47. secundis, tanto citius promotum fuit spatio octidui; & hoc 1 minutum & 47 secunda, aut 107 secunda, divisa per 8. efficiunt 13. ⅜ secundorum, differentiam in spatio 24. horarum. Quâ differentiâ cognitâ, si non otium nec animus sit suscipiendi molestiam ut adaptetur horologium ad veram mensuram, necesse hoc non est; ita enim in navim inferre licet, modo prædicta quotidiana differentia annotetur, & ad eam nosmet componamus ut statim dicetur.

Sed si accuratius Horologium disponere velimus, removendum est minus pondus penduli parumper deorsum, quo tardius movebitur: & tum de novo observatio per solem instituenda est ut antea; si tarde nimis motum fuisset, supra memoratum pondus parumper sursum promovendum fuisset, ita tamen, ne supra punctum medium penduli promoveatur. eâ quippe gaudet proprietate, quod inde sursum promotum horologium lentius iterum promoveat, cujus rei in descriptione Horologii datur demonstratio *; ut & æquationis temporis, cujus solummodo hic docemus usum. Præter certam de-

* Vide supra pag 174.

Dies.	Januar. Min.	Januar. Sec.	Febr. Min.	Febr. Sec.	Mart. Min.	Mart. Sec.	Apr. Min.	Apr. Sec.	Maj. Min.	Maj. Sec.	Jun. Min.	Jun. Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	Jul. Min.	Jul. Sec.	Aug. Min.	Aug. Sec.	Sept. Min.	Sept. Sec.	Octob. Min.	Octob. Sec.	Nov. Min.	Nov. Sec.	Dec. Min.	Dec. Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

demonstrationem etiam revera exactis Pendulis compertum est, quod ad inæqualitatem dierum ad rectam mensuram reducendam, æquatio, prout eam hic per præcedentem Tabulam instituimus, exacte cum experientia conveniat, ita ut tuto ei confidere liceat. Idque tanti momenti est in inveniendis longitudinibus, ut, si non fuerit observatum, nonnunquam spatio 3 mensium in calculo errorem committas 7 graduum & amplius, sine ulla tamen horologiorum culpa: qui gradus sub Tropicis ultra 100 Germanica milliaria continent.

Ostenso, quomodo horologia possint adaptari terrâ, vel quomodo eorum differentia quotidiana sit invenienda, proximum erit dicere, quomodo idem faciendum sit in navi fixa ad anchoram, cum minime possibile sit idem præstare in velificatione.

Observabimus quodam die ortum & occasum Solis, & in utraque observatione ubi ejus medietas exacte supra Horizontem apparet, notabimus horam quam indicat horologium, & supputabimus quot horæ interea fuerint præteritæ, cujus numeri dimidio addito ad horam observationis matutinæ, habebimus horam quam indicavit horologium cum Sol esset in meridiano: cui addens Tabulæ æquationem istius diei, summam notabimus, & horologium ulterius promoveri patiemur. dein quibusdam diebus, elapsis (quo autem plures præterierint, eo melius est) idem omnino faciemus; Et si hora hujus ultimi diei sit eadem, cum ea quæ antea fuerat notata, horologium recte accommodatum est. Sin vero major vel minor sit, vel lentius vel celerius movetur, & differentia divisa per numerum dierum interim dilapsarum dabit quotidianam differentiam, quam annotabimus, & si velimus horologium relinquemus in illo statu; vel alioquin removendo minus pondus penduli ut supra dictum est, melius horologium accommodabimus.

	h.	*m.*	*s.*
Ex. Gr. pone 21. Martii mane cum solis medietas apparet supra horizontem horologium indicare.	5.	30.	10.
Et vesperi ubi Solis medietas latet infra horizontem.	5.	20.	6.

Ut

	h.	m.	s.
Ut ſcias ope horologii horas inter binas obſervationes elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	30.	10.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	29.	50.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	20.	6.
Prodeunt horæ inter binas obſervationes elapſæ	11.	49.	56.
Quarum dimidium eſt	5.	54.	58.
Quo addito ad horam ortus	5.	30.	10.
Prodit hora horologii, cum ſol eſſet in Meridiano	11.	25.	8.
Cui addita æquatione 21. Martii	0.	7.	45.
Summa eſt	11.	32.	53.
Septem diebus poſt ſc. 28. Martii obſervetur ortus ſolis, quum horologium indicat	5.	19.	4.
Et occaſus quum indicat	5.	25.	4.
Ad habendas horas interim elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	19.	4.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	40.	56.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	25.	4.
Prodeunt horæ interea delapſæ	12.	6.	0.
Quarum dimidium eſt	6.	3.	0.
Quo addito ad horam ortus	5.	19.	4.
Prodit hora horologii cum Sol erat in meridie	11.	22.	4.
Cui addita æquatione 28. Martii	0.	10.	1.
Summa eſt	11.	32.	5.

Quæ ſumma ſi fuiſſet eadem cum priori ſcilicet 11. 32. 53. ad rectam menſuram diſpoſitum fuiſſet horologium; ſed cum poſterior minor ſit priori, differentiâ exiſtente 49. ſecundorum, horologium ſpatio 7 dierum tanto tardius fuit promotum, quæ 49 ſecunda diviſa per 7 numerum dierum, dant quotientem 7 ſecunda differentiam diurnam, quâ horolo-

gium tardius movetur; possumus etiam loco ortus & occasus Solis duas æquales Solis altitudines observare ante & post meridiem, & hora horologii annotatâ utriusque observationis tempore, eodem modo, ac hic dictum est procedemus.

VI.

Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo verʃaris.

Singulis horologiis nomina vel signa impone ut A. B. C. & antequam velifices, dispone eadem secundum tempus observatum per Solem in loco, ubi moraris, diminutum æquatione ejus diei, quo observas; quem annotabis.

Dein ubi in mari versaris si vis scire longitudinem loci, in quo es; quot gradibus Meridianus loci hujus sit orientalior vel occidentalior meridiano loci illius in quo adaptasti horologia; observa Solem vel Stellas, ut determines horam, & vide quam horam eodem momento indicent horologia; quam horam, si horologia non fuerint disposita ad rectam mensuram æquabis cognitâ diurnâ differentiâ, ei porrò addens æquationem præsentis diei, quo ita habeas horam in loco illo, ubi horologia fuere disposita. Si hæc hora eadem sit cum illa quæ observata fuit in loco præsente, consistis sub eodem Meridiano, ac ubi horologia fuere disposita ad Solem: Si vero hora observata major sit illâ quam horologia ostendunt, certus es, te pervenisse sub Meridianum Orientaliorem; sin denique fuerit minor, pervenisti sub Meridianum Occidentaliorem: & computatis in singulas quasque horas differentiæ temporis 15 gradibus longitudinis vel in singula minuta 15 minutis, vel totidem quadrantibus gradus, cognosces, quot gradibus dicti Meridiani ab invicem distent. E. Gr. pone Horologia A. B. C. fuisse aptata ad Solem in loco ex quo abiisti, 2 Martii, id est ad horam observatam, sed in tantum diminutam, quanta est æquatio 2 Martii, 2 min. 28 sec. & pone horologium A fuisse dispositum ad veram mensuram, sed B moveri singulis diebus 7 secundis tardius, & C singulis diebus 12 secundis citius.

Ali-

Aliquot diebus post E. G. 15. Maji, ut detegas longitudinem loci in quo in mari versaris; observa horam diei, quæ sit	*h.* 5.	*m.* 18.	*s.* 10.
Et comperis horologium A indicare	2.	6.	0.
Sed horologium B. indicare	1.	57.	22.
Sed cum singulis diebus 7. sec. tardius moveatur, prodeunt spatio 74. dierum nempe a 2. Martii ad 15. Maji	0.	8.	38.
Quæ addita ad horam a B. demonstratam prodit hora eadem ac indicavit horologium A	2.	6.	0.
Invenis etiam horologium C. indicare	2.	20.	48.
Sed cum moveatur 12. sec. singulis diebus citius, habemus spatio 74. dierum	0.	14.	48.
Quæ subtracta ab hora a C. indicata, iterum prodeunt	2.	6.	0.
Cum itaque hora horologiorum sit	2.	6.	0.
Adde illi æquationem 15. Maji	0.	19.	29.
Prodit hora loci ubi horologia disposita sunt	2.	25.	29.
Sed hora observata est	5.	18.	10.
Excedens priorem	2.	52.	41.
Ergo Meridianus loci in quo versaris 15. Maji Orientalior est, Meridiano loci, in quo horologia fuere aptata	2.	52.	41.
Quæ horæ in gradus reductæ, ponendo 15. gradus valere unam horam, prodeunt	*gr.* 43.	*min.* 0.	*sec.* 15.

Verum est ex eodem calculo posse concludi te esse sub Meridiano hôc ipso 180. gradus Orientaliori, quia index horarius revolutionem suam absolvit spatio 12. horarum in horologiis, sed differentia tanta est, ut nequeas in ea decipi. Alioquin enim horologium posset construi, cujus index circuitum suum semel absolveret spatio 24 horarum.

Observandum quoque hic est, cum dico, locum tot gradibus Orientaliorem esse illo ex quo abiisti, illud dici eo respectu quod illuc veneris ad Orientem navigans, versus quam partem gradus numerari possunt usque ad 360; alioquin enim satis no-

tum est: locum, qui 180. gradus Orientem versus ab alio distat, tantum etiam Occidentem versus inde distare: & pariter, qui 300. gradus Orientaliter ab alio distat etiam 60. gradus Occidentaliter inde distare.

V I I.

Mari invenire horam diei.

Quandoquidem pro invenienda longitudine requiritur ut hora loci, in quo es, cognita sit, ut supra dictum est, dicta hora summa exactitudine est observanda; unumquodque enim minutum quo in calculo aberras constituit errorem ¼. gradus in longitudine, id est, prope Æquatorem 3¾. Germanicorum milliarium sed minus ubi longe inde abes:

Quare ad certam horæ inventionem, ne fidas observationi maximæ Solis altitudinis, ut inde concludas præcise meridiem esse vel Solem in Meridiano, nisi inter Tropicos Sol fuerit in ipso puncto Zenith vel ei quam proximus. Nam alias Sol existens prope Meridianum aliquamdiu perseverat sine ulla sensibili mutatione altitudinis suæ; ideoque altitudo meridialis idonea satis est ad latitudinem vel elevationem Poli loci alicujus dimetiendam, non tamen ad longitudinem ejus exacte inveniendam. Multo minus niti potes pyxidibus nauticis in accurato meridiei tempore inquirendo.

Neque annuli Astronomici vel alia horologia solaria certa satis sunt in ostendenda hora ad minuta & secunda. Sed melius est observare solis altitudinem, ubi est in Oriente vel Occidente, quo autem Orienti aut Occidenti propior est, eo melius; ibi enim cum est, mutatur ejus altitudo sensibiliter magis quam ante vel post & ita, ex inventa Poli elevatione, & nota Solis declinatione, hora potest computatione detegi, cujus modus ab aliis satis descriptus est; quia tamen computatio illa molesta est & nonnulli errores in mensuranda altitudine Solis committi possunt faciliorem hic methodum ostendam & demonstrabo.

VIII. Quo-

VIII.

Quomodo ex observatione ortus & occasus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat.

Hæc sane methodus meo judicio omnium est certissima, cum ad eam neque notitia Poli elevationis, neque Solis declinationis, neque ulla instrumenta ad observandum requirantur; cum neque refractio quid nocere possit, quoniam hæc in ortu & occasu Solis ejusdem diei parum aut nihil differre potest.

Sicuti ergo antea docuimus horologia in navi adaptare, & observare quâ horâ eorundem horologiorum Sol fuerit in meridiano; hic eodem modo procedendum est, id est, in ortu & occasu solis, ubi ejus medietas est supra horizontem, annotabis horam demonstratam tunc temporis per horologia; & licet interea velificando fueris progressus, nil refert, uti postea demonstrabitur: dein computans quot interea horæ horologiorum dilapsæ sint, earumque dimidium addens ad horam ortus, habebis horam quam horologium indicabat quum Sol erat in Meridiano; ad quam addenda est æquatio istius diei ex tabula desumta; & si summa æqualis sit 12 horis, fuisti meridie sub eodem Meridiano, sub quo horologia ad solem fuere adaptata; sed si summa excedat 12. horas, fuisti meridie sub occidentaliori meridiano, quam loci ejus in quo horologia sunt disposita; sed si summa fuerit minor 12. horis fuisti sub orientaliori Meridiano, idque toties quindecim gradibus, quot horis summa fuerit minor vel excesserit 12. horas, prout istius rei computationem antea jam docuimus.

E. G. Ponatur Horologia A. & B, ut ante, fuisse adaptata ad Solem in loco ex quo decessisti 2. Martii, id est ad horam Solis diminutam æquatione istius diei scil. 2. min. 28. sec. Horologio A. ad rectam mensuram redacto; B. vero singulis diebus 7. secundis tardius moto; Postea scire desiderans longitudinem loci in quem pervenisti,

	h.	m.	ſ.
(pone 1. Junii,) obſervetur mane ſol medius ſupra horizontem quando horologium indicat	2.	30.	37.
Et Veſperi iterum medius Sol infra horizontem, cum idem horologium indicat	3.	9.	7.
Ad inveniendas horas interea elapſas, ſubtrahe horam ortus	2.	30.	37.
ex	12.	0.	0.
Reliquum eſt	9.	29.	23.
Huic adde horam occaſus	3.	9.	7.
Prodeunt horæ interea elapſæ	12.	38.	30.
Quarum dimidio	6.	19.	15.
Addito ad horam ortus	2.	30.	37.
Habebis horam Horologii A, quum Sol erat in Meridiano	8.	49.	52.
Eodem modo quæratur hora horologii B, cum Sol erat in Meridiano, quæ ſit	8.	38.	5.
Sed hoc horologium ſingulis diebus 7. ſecundis tardius motum retardatur ſpatio 101. dierum a 2. Martii ad 1. Junii	0.	11.	47.
Quæ propterea ad inventam horam addita, datur	8.	49.	52.
Id eſt, eadem hora, quæ per horologium A. inventa eſt; ad quam nunc addita æquatione 1. Junii	0.	18.	10.
Prodit	9.	8.	2.
Hæc eſt diei hora loci in quo horologia adaptata ſunt, quæ cum coincidit cum meridie loci obſervationis;			
Differentia eſt	2.	51.	58.
Quare hic ultimus Meridianus tanto orientalior eſt; quibus horis reductis ad gradus, uti ſupra docuimus prodeunt	gr. 42.	min. 59.	ſec. 30.

Patet te hoc modo invenire longitudinem loci, in quo meridie vel Sole exiſtente in Meridiano fuiſti; quæ differt a longitudine loci, in quo obſervas Solis occa-

ſum,

sum, sed sine sensibili errore æstimare potes, quantum paucis horis progressus fueris, vel longitudo mutata fuerit: Potes etiam, loco observationis ortus & occasus Solis, prius Solis occasum, vesperi observare, & dein proximo mane ortum, utroque tempore notando horam Horologiorum; & inde computa eodem modo horam in loco dispositionis, quum media nox erat in loco observationis, & detege differentiam longitudinis ut ante. Tandem potes quoque loco ortus & occasus Solis observare duas æquales solis altitudines ante & post meridiem, annotando horam horologiorum, & computando eodem modo, quo diximus de ortu & occasu; considerandum tamen est, Solis altitudines optime observari, quando Orienti vel Occidenti proximus est, ut antea notatum.

Licet forte quis censeat, in praxi hujus methodi, inter ante & pomeridianam observationem, quiescentem navem desiderari, aut quæ parum transferatur; certum tamen est, progrediendo nullum sensibilem errorem causari posse, in quantum interea eundem teneas cursum, æquabili velocitate.

Primum enim, si cursum Orientem vel Occidentem versus dirigas, nullus omnino error erit, sed certo concludere poteris, qua longitudine meridie vel mediâ nocte fueris, unde ergo, uti antea dictum est, satis exacte æstimare potes, ubi sis ultimæ observationis tempore.

V. G. pone, quod ante meridiana Solis altitudo 10 graduum observata sit, quum horologia indicant 8. horas & pomeridiana æqualis altitudo quum horologia indicant 2. horas; & quod inter utramque observationem æquabili velocitate Orientem versus navigaverim, licet inscius me 1. gradum in longitudine progressum esse, id est, 1. gradum paralleli juxta quem navigo: Agens jam secundum præscriptam regulam, comperio longitudinem 15. gradus Orientem versus, calculum ineundo a loco, in quo Horologia fuere disposita. quam longitudinem 15. graduum dico esse loci, ubi meridie fui.

Quod ita demonstratur. Quoniam locus vespertinæ observa-

vationis uno gradu Orientalior est, quam matutinæ; certum est in loco vespertinæ observationis Solem 4. minuta prius perventurum esse, ad altitudinem 10. graduum, quam in loco matutinæ. Duorum enim locorum sub eodem paralelo sitorum, quot gradus unus altero Orientalior est, totidem 4. minutis prius in illo observantur singulæ Solis altitudines; ideo si in priori loco cum navi substitissem, Solem vespertinâ observatione reperissem ad altitudinem 10. graduum quum horologia indicabant non 2. horas, sed 2. horas 4. min. ubi rum loci ejus longitudinem, juxta regulam, invenissem 14½. gradus Orientem versus. Sed certum est, me in priori temporis dimidio inter 2. observationes progressum fuisse ½ gradum, quoniam ponitur, me toto tempore profecisse 1. gradum, velocitatemque fuisse æquabilem. Eram igitur meridie in longitudine 15. graduum Orientem versus, sicuti prius erat inventum.

Pariter potest demonstrari, progressum navis Occidentem versus nil obstare, sed regulam sequendo, iterum invenire longitudinem loci, quem meridie præternavigasti.

Si jam cursus inter 2. observationes Meridiem versus vel Septentrionem descifcat, imo licet fieret directe Septentrionem vel meridiem versus, modo ponatur æquabilis velocitas, nullus inde orietur error si Solis altitudo sumatur, quando prope Orientem vel Occidentem est, quibus in locis alibi quoque dictum est optime fieri observationem. Ratio hæc est, quando 2. loca Septentrionaliter vel Australiter a se mutuò distant, & solummodo 1. vel 2. gradus in latitudine differunt, si Sol respectu unius loci in Oriente vel Occidente versetur, ad certam supra horizontem altitudinem, etiam quam proxime eodem tempore ad eandem altitudinem supra horizontem alterius loci apparebit. Ita ut comperiam, licet navis inter matutinam & vespertinam observationem 2. gradus navigaret, quod raro vel nunquam accidit, nullum tamen in longitudine errorem hinc oriri posse, vel tantum paucorum minutorum.

Præſcriptis ergo modis, vel per ortum & occaſum Solis, vel per occaſum & ortum Solis, vel per 2 æquales Solis altitudines, tuto ſemper uti poſſumus, non obſtante progreſſu navium; quemcunque hæ teneant curſum.

Si autem procul ab Æquatore Septentrionem vel Meridiem verſus naviges, præſertim hyeme, altitudo Solis lente mutatur, unde incertæ ſunt obſervationes; ſed iis in locis gradus longitudinis ſunt breviores, vel pauciora milliaria continent quam prope Æquatorem, ideoque errores in inveniendis longitudinibus eo minus ſenſibiles ſunt.

IX.

Potes verò, præſertim in iis oris, quæ procul ab Æquatore Septentrionem vel Auſtrum verſus remotæ ſunt, vel etiam ubicunque velis, præſcriptam regulam ad praxin vocare, obſervando 2 æquales altitudines cognitæ alicujus ſtellæ, quæ multum attollitur ſupra Horizontem. Nam inde ſecundum memoratam regulam, diſces quâ horâ Horologiorum in Meridiano fuerit ſtella, & porro cognita ejuſdem *aſcenſione recta*, ut & *aſcenſione recta* Solis, facile inde ſupputabis horam ſolarem, qua comparatâ cum horâ Horologiorum, ut ante, habebis longitudinem loci, ubi fuiſti ſtella exiſtente in Meridiano.

X.

Quando Horologia, quorum aliquamdiu motus fuit accuratus, ab invicem paululum differunt, prout diuturnitate temporis facile accidit, ut unum vel alterum minuto circiter deficiat, eo in caſu computatio ineunda eſt erit ſecundum iſtud, quod celerius movetur: niſi noris cauſam veriſimilem ob quam citius moveatur; facilius enim Penduli motus retardatur, quàm acceleratur: nam filum, cui Pendulum appendet, poterit forſan per violentam navis agitationem nonnihil extendi, ſed nequit contrahi.

X I.

Quando videndam se offert regio cognita, ne negligas annotare longitudinem illius, quantum exacte fieri poterit, ex inventa longitudine loci in quo verſaris; Primo ad corrigendas inde mappas marinas, poſtquam longitudo loci fuerit diverſis temporibus comperta eadem, ita ut nil amplius de ea dubites. In his enim mappis quantum attinet ad ſitum locorum Orientem & Occidentem verſus, multa ſuperſunt emendanda. Secundo ut ſcias, in proſecutione tui itineris, quantum reſpectu loci viſi velificando progreſſus fueris ad Orientem vel Occidentem: etiamſi infortunio, vel negligentia, omnia quieſcant Horologia, poteris eadem ad motum rurſus adaptare, & diſponere ad horam per Solem compertam. computando porro longitudinem ab ejuſdem loci viſi Meridiano. Nam nullatenus teneris certum Meridianum alicujus loci cogniti, pro initio computationis longitudinum habere, cujus uſus tantum eſt in mappis vel Tabulis longitudinum, in quo caſu uſu venit Meridianus montis Pici in inſula Teneriffa, vel Meridianus inſularum Corvo & Flores, occidentaliſſimarum Azorum vel inſularum Flandricarum, vel cujusvis alterius loci: & foret egregium (quod non obtinet) ſi omnes auctores unum eundemque Meridianum pro primo eligerent, ut ſingula loca iiſdem gradibus longitudinis pariter ac latitudinis determinarentur: ſed in itinere ſatis eſt longitudinum differentiam obſervare, initio computationis facto a Meridiano cujuscunque loci.

X I I.

Si accidat, ut mari medio omnia Horologia quieſcant, quam primum fieri poteſt, rurſus eadem ad motum adapta, ut

ut illorum ope scias, quantum dein ad Orientem vel Occidentem progressus sis, quod non parvi est momenti, nam defectu hujus notitiæ, nonnunquam violentis fluctibus ita abriperis, ut, licet vento secundo naviges, tamen retrorsum abigaris, cujus rei varia dantur exempla.

F I N I S.

EXCERPTA EX LITERIS DATIS LONDINI $\frac{12}{22}$ JANUARII MDCLXV.

TAndem Navarchus Holmius huc advenit, & relatio, quam ipse mihi communicavit de experimento, quod de nostris Horologiis fecit, plane nos certos facit de bono, qui sperandus est, successu; Cum ad insulam St. Thomæ sub æquatore esset, ut inde huc veniret, coactus fuit, longissime Occidentem versus cursum dirigere, prosperum ut obtineret ventum; cum ergo sub ejus auspiciis quatuor darentur naves, omnes simul navigarunt per 600 milliaria non mutato cursu: cum dein secundum ventum nacti essent quo peterent littora Africæ, eo tendebant, cursum suum Orientem inter & Septentrionem dirigentes; cumque hoc cursu 4 vel 500 milliaria confecissent, judicabant navitæ 3 navium quæ sub ejus erant auspiciis, se procul a prædictâ orâ esse, ita ut non sufficientem aquæ quantitatem haberent, dum eo pervenient; Navarchi Holmii navis satis habebat; sed ubi audiret, quid sentirent cæteri, qui tribus reliquis præerant navibus, omnes nautas & gubernatores convocari jus-

 sit,

sit, ut deliberarent de eo quod faciendum esset. Ubi verò vidisset commentarios, & ephemerides, quas illi, qui præerant 3 iis navibus proferebant; & conjecturam de loco in quo versabantur; cumque post longas deliberationes, omnes censerent, præstare ad Barbadas trajicere, quam oras Africæ quærere, quia ventus longe citius eos illuc transferret, dixit ille: Viri computatio vestra cum nostra minimè convenit; nam secundum Horologia mea processi, unde concludo, vos errare omnes, statuendo nos multò longius Occidentem versus esse progressos, quam revera sumus, unius error est 120 milliaria, alius 100, alius 80: verùm ita Horologiis confido ut hac vice experimentum facere velim; nam secundum meam computationem insula del Fuogo (quæ una est ex insulis Capoverdæ seu promontorii Hesperii,) non ultra 30 milliaria a nobis abest; Ibi nobis aquam possumus curare, & eo cursum dirigere constitui; Si vera est computatio, multum præstabit nobis hanc viam ingredi, quam a vobis ostensam; sin evenerit aliter, biduum tantum producemus navigationem, satisque aquæ interim superit, ut Barbadas perveniamus; quoniam tanta mihi in navi copia est, ut vobis defectum vestrum supplere queam; Addens quem cursum tenere vellet, mandavit ut sequerentur ipsum cæteri. Postero mane detegebant insulam del Fuogo, & opportuno illuc advenêre tempore, uti prædixerat: Cogor hic desinere, communicaturus tecum reliquos omnes casus peculiares, quos scriptis mandare promisit, quamprimum illos nactus fuero.

Nota, hæc Horologia fuisse ex primo Pendulorum genere, nec tam exacta quam recentiora.

EXCERPTA EX LITERIS HAGÆ COMITUM, DIE XXVI. FEBRUAR. MDCLXV. DATIS.

Cum per aliquot dies necesse mihi foret cubiculum tenere, & variis observationibus circa duo mea novæ fabricæ Horologia pendula tempus impenderem, mirum quendam eorum effectum, & a nemine unquam vel cogitandum, detexi. Suspensa enim juxta se invicem ad distantiam unius aut duorum pedum, tam accurate congruebant, ut sine ullâ variatione pendulorum vibrationes simul peragerentur. Quod cum per aliquod tempus impense miratus fuissem, tandem reperi ex aliquâ quasi sympathiâ id oriri; ita ut si pendula movissem vibrationibus diversis & ut ita dicam intermixtis, intra dimidiæ horæ spatium consona rursus fierent, & sibi mutuo, quamdiu motum non turbabam, responderent. Remotis deinde à se invicem Horologiis, & ad distantiam 15. pedum suspensis, uno die quinque secundorum discrepantiam animadverti, quæ clare demonstravit, priorem pendulorum convenientiam, uti dixi, à sympathia quadam debuisse proficisci, quæ, meo quidem judicio, unicè insensili aëris agitationi, per pendulorum motus productæ, adscribi potest. Continentur tamen Horologia suis Capsis, quarum utraque si omne plumbum contentum numeres, centum fere li-

brarum pondus æquat. Et hoc observandum, pendula, cum congruunt, non parallelis motibus ferri, sed contrariis, nunc accedendo, nunc recedendo. Quando autem horologia ad parvam distantiam rursus à me fuere posita, pendula, priorem convenientiam brevi tempore recuperarunt.

Nec hisce contentus, asserem latum tres pedes, crassum unum pollicem, ita interposui, ut pars inferior fundum tangeret, superior Horologia excederet & quasi separaret. Non turbata tamen fuit motuum concordia, sed dies noctes que perduravit, imò si ipse turbassem, brevi instaurata fuit. Nunc in id incumbo, ut quam accuratissime Horologia concordent, experturus deinde ad quam usque distantiam sympathia hæc sese exerat; sed, ut ex observatis auguror, non infra 5. aut 6. pedes subsistet. Major tamen horum omnium est expectanda veritas, quam præstabit diligentia mea, & accuratior in rei causas inquisitio.

Quicquid sit, habemus duo Horologia, quæ nunquam inter se discrepant: quod etiamsi mirum sit, tamen est verissimum. Addo, præter Horologia quæ novo hoc invento constructa sunt, nulla alia idem præstitisse; unde simul patet, quam accurata illa sint, quæ ad perpetuum consensum tantillum requirunt.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

DE

HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

I.

Observationes Abbatis Catelani in propositionem, quæ fundamentum est 4ᵃ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii.

DOminus Hugenius in tractatu suo de Pendulis, ut nil quod ad materiam spectat intactum relinqueret, hanc divisit in 5 partes, in quarum 4ᵃ. fuse examinat quæstionem de *Centro Oscillationis* vel *vibrationis*. Sed cum difficile sit animo semper æqualiter attento abstrusas veritates, quales sunt Mathematicæ, perpendere; non est quod miremur, si quæstionem illam non æque accurate, quam quidem reliquas ejusdem operis, examinaverit. Principium autem, quo nititur totum ejus Systema Oscillationis hoc est.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compositum atque e quiete dimissum, partem quamcunque Oscillationis integræ confecerit; atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quo usque possunt ascendere; hoc facto centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam Oscillationem obtinebat *.

* Vide supra pag. 126.

Ut parum firmam propositionem hanc demonstremus, sufficiet observasse; vim, quam vocamus gravitatem, longe aliter agere in pondera inter se juncta quam in pondera a se invicem separata. Sint A & B æqualia pondera, quorum non

TAB XXVIII. Fig. 1.

Ee

non considerantur neque magnitudo neque figura, quasi singula in unicum punctum reducta forent; si separatim suspensa ex eodem puncto D, & elevata ad idem planum Horizontale D A B, dimittantur usque ad F & G, gravitates eorum, ex ratione Mechanica, quæ cum experimentis, & principiis Physices congruit, augebuntur in tali ratione, vel quod idem est, acquirent velocitates tales, ut harum quadrata sint inter se ut altitudines A H & B I. unde illa pondera perpendiculariter descendunt ad Horizontem.

Quod si dein pondera hæc duo, lineâ aut virgâ inflexili A B, quam pondere expertem ponimus, conjungamus, & ex eodem puncto D, ad memoratas distantias D A & D B, suspensa, dimittamus ad F & G ab eâdem, quâ ante, altitudine. Pendulum ex illis compositum, acquiret tantum velocitatis quantum summa duorum Pendulorum simplicium, quoniam commune gravitatis centrum E idem, quod antea, manebit, & ponderum non mutatur situs respectu centri Telluris; sed partes, in quas tota illa velocitas se distribuet ponderibus A & B, erunt inter se ut arcus A F, B G, vel ut radii D F, D G, quoniam in hoc casu ratio inter motus ponderum pendebit ab eorum situ respectu puncti suspensionis D, quod est motuum centrum. Triangula autem H A F & I B G, ut & triangula A F D, B G D cum sint similia, latera eorum, A H & B I, A F & B G, D F & D G sunt proportionalia, id est datur eadem ratio inter altitudines, unde pondera A & B descendunt, & inter velocitates quas acquirunt descendendo; sed altitudines sunt eædem ac in priori suppositione; ergo velocitates sunt diversæ, quoniam illæ altitudines, quæ sunt proportionales velocitatibus ponderum simul appensorum, non sunt proportionales nisi quadratis velocitatum, quando sunt separata.

Porro ponamus pendulum compositum in vibratione suâ occurrere plano duro D F G, quo rumpatur, ita ut a se invicem pondera solvantur, erunt hæc reflexa juxta tangentes arcuum F A & G B ad altitudines, quæ inter se erunt ut quadrata velocitatum, quas cadendo acquisivere, id est, ut quadrata radio-

radiorum D F & D G, vel horum proportionalium A H & B I· nam ſeparatio ponderum non mutat quantitatem motus eorum: efficit ut moveantur juxta legem corporum cadentium, quæ non inter ſe conjuncta ſunt. Demonſtratur in Mechanicis, altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde deſcendit, vel ad quam aſcendit, commune gravitatis centrum multorum ponderum, æqualem eſſe ſummæ altitudinum, quarum reſpectu (gallice *par raport auquelles*). pondera deſcendunt vel aſcendunt, diviſæ per eorundem numerum: ſed probavimus pondera, quæ ſeparantur, rupto pendulo percuſſione in planum oſcillationi illius oppoſitum, iterum aſcenſura eſſe, ad altitudines diverſas ab iis, unde deſcenderunt, & quidem tales, ut ſummæ ad utramque partem æquales eſſe nequeant; nam ultimæ altitudines ſemper habent pro radicibus quantitates primis proportionales, & prætereaeandem, quam eorum radices componentes ſummam, quæ exprimit totam celeritatem penduli A B; ſi ergo diverſas illas ſummas ſeparatim dividamus per numerum ponderum, habebimus altitudinem ad quam centrum commune gravitatis iterum aſcendit, diverſam ab illa, unde deſcendit; quoniam ſunt partes aliquotæ ſimiles quantitatum inæqualium.

Propoſitio igitur Domini Hugenii falſa eſt, & conſequenter quidquid concluſit circa centrum Oſcillationis corruit; vera autem Mathematica hujus quæſtionis ſolutio hæc eſt.

II.

Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis.

QUæſtio de determinando centro Oſcillationis, ſi bene intellecta fuerit, haud difficilis eſt. Centrum Oſcillationis vocatur punctum mobile in Pendulo ad talem ab axe, vel centro ſuſpenſionis, diſtantiam, ut ſi omnes aliæ Penduli partes deſtruerentur, illa ſola pergeret in vibrationibus ut antea; id eſt eodem tempore ac totum Pendulum; Quod ita non fiet cum aliis partibus ſingulis ſeparatim ſumtis; nam

quæ axi viciniores sunt, breviores & frequentiores vibrationes peragent quam remotiores, si arcus similes describant, & aër non resistat.

Cujus rei ratio est, quod viciniores describant arcus minores & acquirant celeritates majores respectu arcuum quam remotiores: nam arcus sunt proportionales quadratis, & velocitates radicibus eorum; quo autem radices minores sunt inter se, eo majores sunt respectu quadratorum suorum.

Cum in Pendulo omnes partes nisi simul, propter earum conjunctionem, moveri nequeant, vibratio minus distantium ab axe ita retardata est a vibratione remotiorum, & vibratio remotiorum ita accelerata est a vibratione aliarum, ut inter illas detur compensatio velocitatum proportionalis arcubus quos describunt; ita ut tempus vibrationis totius Penduli medium sit inter tempus, quo Oscillationem peragunt ejus partes a se invicem solutæ, ut sit æquale summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium, quas ut Mathematice & exactissime procedamus consideramus, ac si reductæ essent in puncta.

Constat experimentis, & per Philosophiam Cartesianam demonstrari potest, omnia gravia tellurem versus cadere in temporibus quæ sunt in ratione subduplicatâ, vel sicuti radices, altitudinum, unde descendunt, si verticaliter descendant, quod etiam & ex principiis Galilæi demonstrari potest, si cadant per arcus similes, qui incipiunt omnes in eodem plano.

Hæ altitudines in Pendulis, quæ describunt arcus similes circa axem, quocum forrmant idem planum, sunt inter se ut distantiæ ab axe, circa quem moventur.

Proposita ergo quæstio eo redit, *ut dividamus, per numerum partium Penduli, summam radicum distantiarum partium ab axe. vel generaliter summam linearum rectarum quæ repræsentant tempora vibrationium partium separatim sumtarum, ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis, quo vibrationes suas peragit Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3a. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

Applicatio hujus principii tribus magnitudinibus quas habet Geometria pro objecto satis facilis est.

Ad

1. Ad determinandum centrum Oscillationis lineæ rectæ suspensæ ex axe, debemus illam concipere, divisam in partes æquales infinite parvas, vel in omnibus suis punctis. Parabola dein super maximâ lineæ ab axe distantiâ describenda est, cujus vertex sit punctum axis in quod terminatur hæc distantia & parameter linea quæ est unitas respectu ejusdem distantiæ. E quovis lineæ puncto ducenda est axi parallela quæ occurrat parabolæ, ejusque applicata fiat, summa omnium applicatarum similium est æqualis rectangulo, cujus altitudo est linea proposita, & basis radix distantiæ inter axem & centrum Oscillationis quæsitum; nam summa illa est Parabola, vel Parabolæ portio, cujus Diameter est linea data, & Parameter tertia proportionalis illi lineæ & maximæ ab axe distantiæ; vel 4a. proportionalis positis hisce tribus, linea, maxima distantia, & differentia hujus cum minimâ.

2. Ut habeamus distantiam quâ centrum Oscillationis Plani remotum est ab axe, debemus concipere partem solidi Parabolici, cujus Parabolæ habeant pro Diametris maximas distantias inter axem & unamquamque linearum parallelarum, quæ implent planum. Si solidum hoc in duas partes æquales secetur juxta Axis longitudinem; & dimidia pars secta fuerit inter applicatas ad distantias ab Axe, & inter Plani latera, segmentum æquale erit Prismati, quod pro basi habet planum, & pro altitudine radicem distantiæ axis a centro Oscillationis ejusdem plani. si vibratio fiat circa Punctum vel si, quum fit circa Planum, Pendulum sit compositum e partibus, quæ sint in planis diversis respectu Axis, determinabitur, eâ methodo quâ diximus, quodvis centrum Oscillationis partium, quæ sunt in eâdem lineâ rectâ transeunte per punctum suspensionis, vel in eodem plano transeunte per Axem; omnia illa Oscillationis centra facient Pendulum multo simplicius & habens idem Oscillationis centrum, ac primum. Invenietur Oscillationis centrum dividendo per numerum aliorum Oscillationis centrorum summam linearum rectarum, quæ repræsentant tempora, quibus conficerent peculiares suas vibrationes. Tempora illa pendent ab arcubus, vel curvarum portionibus, descriptis ab omnibus Oscillationis centris in vibratione Penduli, qui arcus considerari debent singuli velut infinita plana diversimode ad Horizontem inclinata.

3. Quod ad solida attinet, concipe illa dividi in parallelas

inter se superficies & ad axem perpendiculares; formari debet, secundâ sectione, planum vel superficies curva distantiarum inter illorum centra Oscillationis & axem †, circa cujus puncta moventur. Sic in summâ centrorum, quæ ab unâ parte rectas lineas terminant, ex quibus planum hoc, vel superficies illa curva, composita est, habetur Pendulum magis simplex quam solidum, & cujus vibratio æque diuturna est. Centrum Oscillationis novi illius Penduli determinabitur transferendo omnia illa centra Oscillationis particularia ad Axem qui est eorum numerus, & ponendo illum axem ita moveri, ut puncta ejus percurrant eosdem arcus ac centra. Si solida proposita sint Prismata recta, habebunt eadem Oscillationis centra, ac eorum bases, si hæ fuerint perpendiculares ad axem.

Sic centrum Oscillationis solidi pendet a centris Oscillationis certarum superficierum motarum circa punctum, quarum commune Oscillationis centrum est centrum Oscillationis lineæ rectæ motæ circa aliam rectam vel curvam; ita ut non requirantur aliæ regulæ pro corporibus quam pro lineis & superficiebus.

MONITUM.

Observationes Abbatis Catelani primum editæ fuere in 25 diario Parisiensi anni 1681, & examen Mathematicum in 29 diario ejusdem anni. Scripta ambo in primo diario sequentis anni iterum extant, cum monitu varia defici in prima editione, quam solam Hugenius viderat cum respondit; & in qua non reperiuntur ea quæ minori charactere hic edita sunt. Sola verba sequentia in prima dantur & in secunda fuere omissa post †. centrum Oscillationis hujus plani coincidet cum centro Oscillationis solidorum illorum.

III.

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4am. propositionem Tractatus de centris Oscillationis.

Admiratus vidi, Theoriam meam de centro Oscillationis oppugnari, contra quam per 9 annos, a quibus typis man-

mandata fuit, nemo quid protulit; sed considerata refutatione, qua Abbas Catelanus 4^{am}. meam propositionem aggreditur, non vidi, quod ullatenus me feriat. nam ut paucis dicam, in quo fallitur; negat, datis duabus lineis & præter has, duabus aliis, quæ diversam quam primæ inter se rationem habent, summam duarum ultimarum æqualem unquam fore summæ duarum priorum.

Concipe priores 5 & 10 pedum, & alteras 3 & 12 & vide num harum summa æque ac illarum non sit 15: ut autem pateat errorem ejus inde oriri, utar eodem, quod ille proposuit, exemplo.

A & B sunt duo pondera applicata virgæ vel lineæ D B, quæ considerari debet ut inflexibilis & sine pondere; quæ libere notetur circa punctum D: tale Pendulum compositum voco e ponderibus A & B; si hoc peragat partem vibrationis, Ex. Gr. usque ad D F G, & occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera a lineâ inflexili separentur, & tendat sursum eorum unumquodque cum velocitate acquisita, ad maximam quam potest altitudinem, velut ad L & M, super planis inclinatis si velimus, quæ tangant arcus A F, B G; dico commune centrum gravitatis ponderum A & B quæ ascendunt in L & M tunc ad eandem fore altitudinem, ac erat in E, ante vibrationem inchoatam.

TAB. XXVIII. Fig. 1.

Abbas Catelanus ut falsam hanc probet propositionem, demonstrat, altitudines, ad quas duo pondera soluta ascendunt, ut hic N L, O M, diversas esse ab iis unde descenderunt, scilicet A H, B I. id quod verissimum est ex ratione ab ipso datâ, quod alteræ sint inter se ut lineæ D F, D G, alteræ vero ut quadrata harum linearum; *si ergo dividamus*, inquit *diversas illas summas per numerum illorum ponderum*, id est, si sumamus dimidium linearum L N, M O, & dimidium linearum A H, B I. *habebimus ab una parte altitudinem ad quam centrum commune gravitatis ascendit, & ab altera altitudinem unde descendit:* id verum est, per divisionem has duas altitudines detegi. sed minime concedo, duas summas divisas differre inter se; quod Abbas Catelanus probare

bare nequit; neque igitur, duas inventas altitudines centri gravitatis inæquales esse, id quod in conclusione contendit, nam licet altitudines L N, M O, diversam habeant rationem inter se quam altitudines A H, B I, non sequitur summas primarum & secundarum differre.

Possem præter hunc alium locum observare, ubi fallitur Abbas Catelanus, sed non hærebo, quoniam id, quod profert non spectat ea quibus me aggreditur. Unicum verbum addam de examine ejus Mathematico, ut vocat, de centro Oscillationis edito in diario 15. Dec. 1681. ubi contendit se invenisse regulam hanc generalem, scilicet, *per numerum partium Penduli dividi debere summam radicum distantiarum partium ab axe; ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis quo vibrationem peragit illud Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3ª. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

TAB. XXVIII. Fig. 3. Relicto omni peculiari examine, satis erit ad vitium regulæ detegendum, notasse, juxta hoc principium, duas lineas graves ut A B, B C, junctas & inter se angulum quemcunque efficientes, suspensas in B semper idem Oscillationis centrum habere; ideoque vibrationes semper fore æque veloces, uti facile intelligunt hi, qui in hisce materiis parum sunt versati; sed & illi videbunt, quod æqualitas illa vibrationum locum habere nequeat, quoniam augendo angulo tandem duæ lineæ simul junctæ unicam efficiunt rectam *a* B *c*, cujus vibrationes forent æque diuturnæ cum vibrationibus anguli A B C, linea vero recta in puncto medio suspensa, nullas peragit vibrationes, aut saltem velocitate infinite exigua movetur.

Porro credo Abbati Catelano satis difficile fore, suâ regulâ, centrum Oscillationis in quibusvis particularibus figuris, etiam simplicissimis, determinare, sed, si id forte perficiat, inveniet, suam Theoriam cum experientiâ nunquam convenire, & meam semper summâ exactitudine eidem respondere, si modo experimenta exactissimè instituta fuerint.

Non possum hac occasione silentio præterire, P. Dechales, in

in quodam magni sui Cursus Mathematici loco, memorando experimentum cum Pendulo composito ex duobus ponderibus institutum, in quo computans rationem non habuit (ut debebat) ponderis baculi, cui pondera erant applicata, immerito regulas nostras de determinando centro gravitatis culpare, quasi non convenirent cum iis quæ ille revera observarat.

IV.

Exceptio Abbatis Catelani ad responsionem Hugenii.

NOn debebat Hugenius a suo principio separare consequentiam, ut hanc aliter intelligat, quam ego in scriptis meis. Prorsus deberem oblitus esse Arithmetices, si absolute negarem, ut me facere contendit, *quod 4 magnitudines inæquales possint efficere 2 summas æquales*, quum nil aliud concludo in scriptis, præterquam quod propositio Hugenii vera esse nequeat, nisi pars sit æqualis toti. Ut hoc melius pateat, debemus hic proferre propositionem illam generalem propriis terminis.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compositum, atque e quiete demissum, partem quamcunque Oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam Oscillationem obtinebat.

Cum hæc propositio terminis generalissimis concepta sit, ita ut numerus ponderum, situs eorum, duratio Vibrationis, ipsam non mutent, pono, Exempli causâ, Pendulum compositum e ponderibus duobus æqualibus, & inter se ad quam libuerit a se invicem distantiam junctis. Considero porro altitudines, quæ sunt proportionales quadratis velocitatum in duobus Pendulis simplicibus, esse inter se ut velocitates in

Pendulo composito. Nam eandem habent proportionem, quam arcus descripti a duobus ponderibus æqualibus, ex quibus Pendulum formatur; duo illi arcus sunt spatia, quæ duo pondera percurrunt, eodem tempore, velocitatibus, quæ necessario sunt ipsis spatiis proportionales.

Celeritas totalis Penduli compositi, quæ inter partes distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper æqualis est summæ celeritatum, quas eædem partes acquirerent, si a se invicem fuissent sejunctæ, & omnes separatim ex iisdem altitudinibus & ad easdem ab axe, distantias descendissent. Altitudines semper sunt ut quadrata velocitatum, sive pondera separatim adscendant, sive descendant. Omnibus his bene intellectis facile patet, ad hanc propositionem redire quæstionem. *Si habeamus duas magnitudines inæquales* a a *&* b b, *summam radicum ipsarum* a † b, *& quadrata partium illius summæ, quæ sint proportionales dictis magnitudinibus, quæque adeo communem denominatorem habeant* a a † b b, *& numeratores diversos* a^3 † a a b *&* b^3 + a b b, *demonstrare, summam harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æqualia Pendulo alligata dimittuntur, repræsentant, non esse æqualem summæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent, ad quas duo pondera, postquam percussione fuerint separata, redeunt, nisi minor ex hisce magnitudinibus* a a *&* b b *sit æqualis majori, id est, quia istæ magnitudines in quæstione propositá semper inæquales sunt, nisi pars æqualis sit, toti.*

Maxime sensibilis hujus veritatis demonstratio est comparatio terminorum quæstionis per regulas Algebraicas, id quod examinandum relinquo iis, qui usum illarum regularum norunt. Quod rem ipsam spectat, nullius est momenti; sive centrum Mathematicum Oscillationis bene sive male determinatum sit, inventio Penduli nec minus utilis hominibus, nec minus auctore suo digna est.

V. Ob-

V.

Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus.

Si vis gravitatis ageret in corpora tanquam in puncta Mathematica, vel si spatium contentum sub Cycloide esset divisibile in infinitas alias Cycloides, similes & parallelas, quidam Geometræ revera demonstrassent, uti contendunt, pendula illam debere describere curvam ut Vibrationes, æqualibus temporibus, peragant; sed nulla datur pars in corpore gravi, quale est Pendulum ex cupro vel plumbo, quæ non æque ac centrum Tellurem versus propellatur magis minusve pro inclinatione, juxta quam movetur; Præterea spatium, quod continet Cyclois, non potest repleri infinitis aliis Cycloidibus similibus, quoniam tripla circuli superficies æqualis esset duplo quadrato diametri. Latet igitur adhuc Geometras, quamnam lineam curvam describat Pendulum, cujus Vibrationes sunt isochronæ. Consequentia hæc patet, si consideremus, in corpore Pendulo, quando centrum vel alia quælibet pars Cycloidem percurrit, partes viciniores Axi, vel inde remotiores, eodem tempore, describere lineas curvas inter se similes, sed quæ non sunt Cycloides; ut patet ex dictis, & quia in quovis arcu perpendiculares ductæ e tangentibus suis ad tangentes Cycloidis sunt æquales. Omnes itaque partes non habent æqualem inclinationem in descensu, neque Tellurem versus cum eâdem velocitatis proportione propelluntur; unde sequitur, Vibrationem totius Penduli, quæ necessario pendet a Vibrationibus, quas peragunt partes ejus separatim sumtæ, differre a Penduli Vibratione, si reductum foret ad illam partem, quæ movetur in Cycloide.

Videtur huic potius causæ, quam crassitudini fili, cui pondus alligatur, adscribendam esse artificum praxin, quos experientia cogit curvaturam a Cycloide diversam laminis tribuere, inter quas suspendunt Pendulum.

Non tamen mihi animus est, hic absolute oppugnare sententiam illorum, qui credunt corpora gravia moveri, veluti puncta, quæ in Cycloide, ad Horizontem perpendiculari, peragunt suas Oscillationes, temporibus æqualibus, a quacunque dimittantur altitudine. Contendo tantummodo, illud nondum esse demonstratum, nisi alterutrum horum probetur, vel quod curvæ parallelæ Cycloidi eandem habent proprietatem quantum ad motum corporum, licet non sint Cycloides, vel quod inæqualitas temporis, quod brevius est in parallelis, interioribus & Cycloide viciniores Axi, ita moderetur contraria inæqualitate temporis, quod majus est in parallelis exterioribus & ipsâ curvâ remotioribus ab Axe, ut compensatio inæqualitatum ambarum in Cycloide detur, quæ tanquam medium locum tenet inter omnes curvas ipsi parallelas. Geometræ hanc difficultatem examinabunt si dignam suâ attentione judicent; nec, nisi postquam eorum sententiam novero, observationes meas hac de re dare potero.

V I.

Responsio ad objectiones Hugenii adversus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oscillationis.

HUgenius proposuit objectionem adversus propositionem deductam ex principio, a me, ad determinandum Mathematice centrum Oscillationis Penduli, proposito; sed debuit examinare id, quod præcedit locum, quem e scriptis meis profert, nec generalem habere regulam ad casum particularem tantum accommodatam, quem elegi, ut uterer exemplo simplicissimo & facillimo; scilicet quando Pendula composita sunt ex partibus, quæ describunt arcus similes circa Axem, quocum faciunt idem planum; tum enim distantiæ ab illo Axe sunt radii arcuum, qui habent eandem inter se proportionem, ac perpendiculares ad Horizontem, vel sinus, qui sunt altitudines, a quibus singulæ partes in Oscillatione descendunt. Itaque cum Pendula, de qui-

quibus Hugenius loquitur, ut probet propositionem meam falsam, sint anguli rectilinei agitati circa verticem, non habentes requisitam conditionem, me non feriunt. Si concipiamus tales angulos moveri circa Axem, per vertices illorum transeuntem, patet summas distantiarum Axis ab omnibus punctis linearum, quæ Pendula componunt, esse inæquales, prout illæ lineæ efficiunt cum Axe angulos magis minusve acutos. Et meâ regulâ detego summas distantiarum esse æquales Parabolis habentibus pro Diametro maximam ab Axe distantiam, & pro Parametro 4^{am} proportionalem positis hisce tribus, lineâ datâ, quæ eadem est in quovis Pendulo, maximâ distantiâ, quæ variat pro variis angulis, & unitate; unde sequitur, tempus Oscillationis valere ; maximæ ab Axe distantiæ, & non in omni casu idem esse; tanto enim brevius est, quanto angulus est obtusior, id est, quanto Pendulum magis Axi vicinum est.

Si Hugenius desiderat propositionem quæ conveniat Pendulis, circa punctum motis, mutanda tantum erunt verba quædam in principio Pendulorum habentibum Axem ; loco *radices distantiarum illarum*, legendum *summæ linearum rectarum, quæ repræsentant tempora Oscillationum omnium partium separatim sumtarum.*

Hoc modo propositio inserviet ambobus casibus. Sed res melius intelligitur per generale Principium, quod proposui & ita se habet. *In eodem Pendulo, cum omnes partes nisi simul moveri nequeant, propter suam conjunctionem, vibratio minus distantium ab Axe, vel puncto suspensionis, ita retardatur a vibratione remotiorum, & reciproce Oscillatio remotiorum ita acceleratur per Oscillationem aliarum, ut detur inter illas compensatio celeritatum proportionalis arcubus, vel curvarum portionibus, quas describunt, ita ut tempus Oscillationis totius Penduli sit medium inter tempora Vibrationum, quas peragerent illæ partes, si non inter se forent conjunctæ, id est, ut sit æquale summæ temporum illorum divisæ per numerum partium, quas debemus considerare ut æquales & infinite parvas.*

Demonstrare potero in sequentibus, non adeo difficile esse, ut quidem Hugenio videtur, accommodare illud Principium ad particulares magnitudinum Geometricarum species suspensarum ex Axe vel puncto.

Quod ad experimenta attinet, paratus sum demonstrare hæc ita non posse institui, ut perfecte conveniant cum regulis simplicibus & generalibus, quæ deducuntur e principiis Mathematicis, eandem ob causam ob quam generalis regula, stabiliri nequit, certa, & constans, in casibus particularibus, qui dependent a pluribus causis, non exacte notis.

VII.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Basileæ ad Autorem Diarii Parisiensis, de Controversia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oscillationis.

QUum nondum observaverim, Hugenium respondisse, ad exceptionem Abbatis Catelani, quæ spectabat primariam ejus de centro Oscillationis propositionem, te haud ægre laturum credo, si verbulum ad ejus defensionem ad te scribam. Quicquid D. Catelanus disputat, eo redit ut probet, *summam radicum duarum magnitudinum quarumvis non posse in duas partes ita dividi, ut proportionales sint ad magnitudines datas, utque summa quadratorum ipsorum sit æqualis summæ magnitudinum.* Id vero neutiquam in dubium ab Hugenio vocatur, qui tantum affirmat, *summam harum magnitudinum posse esse æqualem summæ duarum aliarum, quæ quadratis priorum proportionales sunt.* Quod & veritati consonum est.

Atque ut ostendam, controversiæ omnis cardinem hic verti, utar eodem exemplo de duobus ponderibus æqualibus, & quidem positis numeris, ut veritates hæ abstractæ sensui magis obviæ fiant.

Sint

Sint A & B duo corpora ex Axe D suspensa ita, ut unius distantia ab Axe quadruplo major sit alterius distantiâ. TAB. XXVIII. Fig. 4.

Adeoque si altitudo perpendicularis B I, ex qua descendit corpus B describendo arcum B G, ponatur quatuor pedum, altera A H, unde corpus A delabitur, unius pedis erit. Celeritates igitur, quas separatim cadendo acquirunt, quoniam sunt ut radices altitudinum, se habent ut 2 ad 1. Summa 3, quæ totalem Penduli celeritatem manifestat, quando proportionaliter ad altitudines, sive ad arcus B G & A F dividitur, dat gradus celeritatis, quos obtinent pondera, quando conjunctim in tabulam D G decidunt, videlicet $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, quorum quadrata sunt $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, unde quæ prodit summa, sane a summa altitudinum, e quibus pondera dimittuntur, differt. Veruntamen hæc quadrata proportionem solummodo altitudinum O M & N L, ad quas pondera, dum a tabula resiliunt, adscendunt, non ipsas altitudines exprimunt; quas inter ratio quidem esse potest, quæ est inter $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, hoc est inter 16 & 1, dum ipsa summa est quinque, quæ est summa altitudinum B I & A H unde pondera delapsa sunt.

Nam si ponamus altitudinem O M $4\frac{12}{17}$ pedum esse, & alteram N L $\frac{5}{17}$, O M se habebit ad N L, ut 16 ad 1; & O M † N L erit æqualis B I † A H. Idcirco centrum gravitatis commune ponderum A & B, ubi in L, M pervenere, erit ad eandem altitudinem, quam obtinebat ante Oscillationis initium. Id clare ex inspectione figuræ apparet. Pondus enim M tantum supra lineam Horizontalem B D elevatur, quantum L infra eam deprimitur, videlicet $\frac{12}{17}$ unius pedis; sequitur hinc in triangulis similibus M P Q & L Q R latera M Q & Q L esse æqualia, hoc est medium lineæ M L, quæ duo pondera conjungit, esse in intersectione lineæ Horizontalis.

VIII.

Excerpta ex literis D^ni. Hugenii ad Auctores Diarii Parisiensis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus responsionem ad exceptionem D^ni. Abbatis Catelani, de centro Oscillationis.

HUc usque distuli respondere ad exceptionem D^ni. Abbatis Catelani, & fere omnis nostræ controversiæ oblitus eram, quoniam non audiveram, ullum ex iis qui tales ponderant quæstiones in illius partes ivisse. Sed cum ex amicis quidam desiderarent, ut Geometris facilius redderem litis nostræ examen; & eo impedirem quo minus illi, qui hanc norunt, silentium meum reprehendant, vos rogo ut diariis vestris, sequentia velletis inserere, cum quibusdam vestrum jam dudum communicata.

Abbas Catelanus, visi meâ responsione ad primam observationem, suoque errore cognito, credidit se illam posse dissimulare, si diceret, observationes suas ex vitioso autographo editas esse, in quo non solum quædam verba deerant, sed etiam sex septemve ordine sequentes lineæ; cumque illæ suppletæ sint in secunda Editione, ubi addidit, *& quidem tales, ut summæ* cum sex aliis lineis, propositam objectionem omnino mutavit.

Non opportunum tamen duxit hac de re lectorem monere, ne quidem in suâ exceptione, in qua positâ hac mutatione ratiocinatur. Cùm enim antea se demonstraturum promiserat, propositionem meam 4^am de centris Oscillationum falsam esse nisi pars sit æqualis toti, in præsens ut illud probet, non tantum ponit axioma hoc irrefragabile *totum esse majus parte*, sed præter hoc pro vero habet quoddam, quod sibi finxit, de motu Pendulorum, principium.

Rem

Rem ita se habere ostendam, & ut mutatam ejus objectionem solvam, demonstrabo principium, quod ponit, verum esse non posse. Etiam falsum esse ostendam alterum ejus principium generale, quo utitur *in suâ verâ solutione Mathematica Problematis de centris Oscillationis*, & tandem ambo hæc principia sibi mutuò contrariare: non despero fore ut ipse Abbas Catelanus mecum conveniat, si ad sequentia attendat.

Quæstio secundum illum ad hanc propositionem redit. Si habeamus duas magnitudines inæquales aa & bb, & summam harum radicum dividamus in duas partes, quæ sint inter se ut aa ad bb, quæ partes ideo sunt $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, ut facile per Algebram invenitur, demonstrare, summam magnitudinum aa & bb, quæ repræsentant altitudines, unde descendunt pondera duo æqualia eidem Pendulo alligata, non posse æquari summæ quadratorum partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quarum quadrata repræsentant altitudines, ad quas pondera, percussione separata, redeunt, nisi pars aa æquetur bb; id est (quoniam quantitates in quæstione proposita sunt inæquales) nisi pars æqualis sit toti.

Hæc est propositio Abbatis Catelani, quam tantum clarius exprimere conatus sum, quâ demonstratâ, ut facile fit comparando duas illas summas per calculum Algebraicum, contendit, fundamentalem meam de centris Oscillationis propositionem ruere.

Sed etiam relictâ Algebrâ demonstrari potest illius propositio; nam si ponatur aa æquale esse 1; & bb æquale 4; summa radicum $a + b$ est 3, & partes proportionales hujus summæ sunt $\frac{3}{7}$ & $\frac{12}{7}$, faciunt enim junctim $\frac{15}{7}$ hoc est 3. Quadrata earundem partium sunt $\frac{9}{49}$ & $\frac{144}{49}$. Hoc igitur solum restaret demonstrandum, summam 1. & 4. non esse æqualem summæ, quæ prodit ex additione $\frac{9}{49}$ ad $\frac{144}{49}$, sive 5 & $6\frac{1}{49}$ non esse æqualia inter se; quod sane per se clarum est.

Vera ergo esset Abbatis Propositio nisi affirmaret quadrata partium $\frac{a3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b3 + abb}{aa + bb}$, quæ hic sunt $\frac{9}{49}$ & $\frac{144}{49}$, re-

Gg præ-

præsentare altitudines, ad quas pondera sejuncta redeunt. Non dissentiet & facile probari potest illud deductum esse ex Principio, quod sibi finxit, & pro fundamento habet propositionis suæ; scilicet, *celeritatem totalem Penduli compositi, quæ inter partes distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper æqualem esse summæ celeritatum, quas eædem partes acquisivissent, si sejunctæ singulæ separatim ex iisdem altitudinibus, & in eadem distantia ab Axe descendissent.* Ponit ergo, ut me refellat, principium hoc, quod falsum contendo; in demonstratione computationem memoratam sequar.

D^nus^ Abbas novit & concedit, detegi altitudinem, unde commune ponderum gravitatis centrum descendit, si dividamus summam altitudinum 1. & 4. (unde duo pondera simul alligata descenderunt) per 2 numerum ponderum, quæ ergo est $\frac{5}{2}$. Concedit pariter, dari altitudinem, ad quam revertitur commune eorum gravitatis centrum, scilicet $\frac{153}{75}$, vel $3\frac{3}{75}$, si per numerum ponderum duo, dividamus summam altitudinum $\frac{9}{27}$ & $\frac{144}{27}$, ad quas pondera percussione separata redeunt.

Centrum ergo gravitatis revertetur altius quam unde descenderat, quantum $3\frac{3}{75}$ excedit $2\frac{1}{2}$, quod primario adversatur Mechanices Principio. Hoc si D^nu^ Abbas efficere possit, detectum habebit perpetuum mobile: Quum ergo ejus Principium ex quo falsa sequitur conclusio, falsum sit, exinde nil quo mea labefactetur Propositio, potest inferri vel deduci. Quod ad alterum ejus Principium attinet, quod pro fundamento habet regulæ generalis de determinandis centris Oscillationis, in eundem inducit errorem. Hoc Principium est, *tempus Vibrationis Penduli compositi esse medium inter tempora Vibrationum partium, id est, æquale esse summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium.* In Pendulo, quale consideravimus, ubi ponderum distantiæ, a puncto suspensionis, sunt 1 & 4, si ponamus tempus minoris ex partibus separatis esse unum, (unde sequitur, tempus alterius partis separatim agitatæ esse duo;)

secun-

ſecundum ejus principium, ſumma illorum temporum, quæ eſt tria, diviſa per duo, numerum partium, erit tempus Penduli compoſiti, ſcilicet $\frac{3}{2}$. Hiſce poſitis, nil præterea ponendo præter id quod concedit D^us^ Abbas, deteguntur altitudines, ad quas revertuntur pondera, poſtquam a Pendulo compoſito ſunt ſejuncta; nempe $\frac{4}{9}$ & $\frac{64}{9}$; quarum ſumma $\frac{68}{9}$, diviſa per duo, numerum ponderum, dat $\frac{34}{9}$, vel $3\frac{7}{9}$, altitudinem, ad quam adſcendit commune gravitatis centrum, quæ etiam ſuperat $\frac{5}{2}$ vel $2\frac{1}{2}$ unde demonſtravimus centrum deſcendiſſe. Non addo methodum computationis quæ facilis eſt. D^nus^ Abbas ergo dum quærit principium bis male divinavit; proprie enim divinare eſt, ratiocinia deducere ex principiis, quæ levem tantum veri ſpeciem præ ſe ferunt; & verum eſſet, quæſtionem de centro Oſcillationis non difficulter reſolvi, ſi, ut ipſe fecit, tantum ponendum foret id, quod ſtatim rem quæſitam determinat.

De cætero, contraria eſſe inter ſe ambo principia clarum eſt; quoniam ut patet, ex his diverſæ ſequuntur concluſiones, altitudines enim, ad quas centrum commune gravitatis aſcendit, diverſæ ex utroque deteguntur, nempe $3\frac{3}{13}$, $3\frac{7}{9}$.

Unum hoc addam, ut reſpondeam difficultati, quam D^nus^ Abbas propoſuit, contra motum in Cycloide*, hanc difficultatem ſolutam dari in ipſo meo tractatu de centro Oſcillationis in cujus propoſitione 24 explicavi, quomodo effici queat, ut omnia ponderum Penduli puncta moveantur in Cycloidibus æqualibus; licet in praxi minime neceſſaria ſit correctio hæc.

* Vide ſupra pag. 227.

I X.

Reſponſio D^ni^ Abbatis Catelani ad literas D^ni^ Bernoulli de Controverſia ſua cum D^no^ Hugenio de centro Oſcillationis.*

* Vide ſupra pag. 216.

UT reſpondeam ad has literas, idem repetam, quo utitur D^nus^ Bernoulli, exemplum Penduli compoſiti ex ponderibus æqualibus eidem virgæ applicatis, & ex eodem centro

suspensis, a quo pondus unum quater magis quam alterum distat; ita ut altitudines perpendiculares, unde descendunt sint ut 1 ad 4.

Convenit inter nos de proportione inter has altitudines, & de summa velocitatum, quas illa pondera acquirerent, si separatim ab iis altitudinibus caderent; sed contendimus de exprimendis his altitudinibus respectu spatii, quod sit communis earum mensura, & pro unitate habeatur. Cum omnibus, qui ante me de similibus quæstionibus scripserunt, pono veros numeros, quibus exprimuntur altitudines, esse quadrata ipsorum numerorum qui velocitates designant, in illis casibus, in quibus inter altitudines & inter velocitates non alia datur ratio, præter generalem experientiâ detectam.

Patet autem ex numeris quos in computatione mea detexi, (cum 9 & 144 ducta in $\frac{1}{25}$, pedis, id est 6 pedes cum 1 digito 5 lineis & quod excedit, differant cum 1 pede & 4 pedibus, aut 5 pedibus,) summas altitudinum, ad quas adscendunt pondera in exemplo proposito, non esse æqualem summæ altitudinum unde descendunt, quam æqualitatem D^{us} Hugenius ponit in generali propositione, quâ utitur pro principio in suo tractatu de centro Oscillationis.

D^{us} Bernoulli respondet, quadrata numerorum, qui exprimunt velocitates ponderum, tantum exprimere proportionem altitudinum, ad quas revertuntur post illorum separationem, & non ipsas altitudines, quæ quidem inter se habere possunt rationem, $\frac{144}{17}$ ad $\frac{9}{17}$ dum tamen harum summa est 5, quæ est summa altitudinum, unde pondera descenderunt. Nam altitudines, ad quas revertuntur separata, sunt juxta illum $4\frac{12}{17}$ & $\frac{5}{17}$, quarum summa valet 5, ut summa primarum altitudinum 1. & 4. Iterum respondere non difficile erit. Rogatum velim D^{um} Bernoulli, dum contendit, proportionem quadratorum numerorum, qui velocitates exprimunt, tantum considerandam esse, quâ motus lege, & per quodnam principium Mechanicum pondera, de quibus agimus, potius redeant ad altitudines, quas ille notavit, &

quæ

quæ cum ipſius ſententia congruunt, quam ad illarum proportionales $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$, quarum ſumma eſt 6; vel ad $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{17}$ quarum ſumma eſt 4; vel ad innumeras alias ſimiles, quæ habeant inter ſe eandem proportionem, $\frac{144}{17}$ ad $\frac{9}{17}$, ſed ex quibus altitudo centri gravitatis reverſi major minorve, quam unde deſcendit deducitur. Certè pondera non revertentur ad omnes altitudines proportionales quadratis velocitatum, quas deſcendendo acquiſiverunt, quoniam gravitas gradatim retardat, & tandem deſtruit velocitates, cum quibus reflectuntur pondera.

Quid ergo eveniet? rogo D^um^ Bernoulli ut illud explicare velit? An Natura per ſe incerta de eo quod ſibi agendum eſt, pro voluntate D^ni^ Bernouilli actura eſt? Cum ipſius veniâ, hac de re dubitabo, donec ſententiam ſuam ſolidis argumentis, ex Phyſica deductis probet. Interim credo me jure concludere, rationibus quas affert pro D. Hugenio hoc confirmari, propoſitionem hujus generalem & fundamentalem de centris Oſcillationis non eſſe omni exceptione majorem.

X.

Dn. Bernouillii narratio controverſiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dn. Catelani.

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoullii Lipſiam miſſis.

Menſe Septembri A. 1681. Abbas Catelanus propoſitionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horologio*

logio Oſcillatorio inſcripſerat, adortus eſt, formata contra illam objectione; in qua quia mentem ſuam minus feliciter expreſſit, anſam dedit iſti controverſiæ, quæ hucusque fere inter illos viguit. Verum quidem eſt, eum initio A. 1682. objectioni ſuæ, additis paucis lineis, variationem quandam induxiſſe; ſed quoniam ejus partes ſatis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris ſui excitavit opinionem, quaſi perſuaſum haberet, ſummas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim deſcendunt, & ad quas poſtmodum ſeparatim aſcendunt, inæquales eſſe debere hanc ſolam ob cauſam, quod *priores altitudines ſint proportionales ipſis ponderum celeritatibus, poſteriores vero non niſi quadratis iſtarum celeritatum.* Quare etiam Hugenius, id unicum Catelano ſcrupulum movere ratus, reſpondere abſtinuit, usque in menſem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12 breviter monſtravit, fieri utique poſſe, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant ſummam, etiamſi diverſam ab illis rationem habeant, neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον Catelani ψεῦδος quod tamen in prima jam objectionis ſuæ impreſſione manifeſte ſatis prodiderat, dum ſuppoſuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compoſitum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat ſumma pendulorum ſimplicium;* id vero ſicco pede præteriit Hugenius, vel quod non penetrarit ſtatim, ob nullam periodorum connexionem, quorſum falſa iſta Catelani ſuppoſitio tenderet, vel potius quod illi ceu veriſimili admodum tum ipſemet adſtipularetur. Catelanus interea Hugeniano reſponſo non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis Algebraicis rem aggreſſus eſt, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compoſiti æquet ſummam celeritatum partium ejus ſeparatarum.* Quo facto controverſia iſta ultra annum ſopita jacuit. Me quod ſpectabat, cui Hugenii liber tum nondum viſus, nedum lectus fuerat, ſcopum alium non habebam, quam illuſtrare ejus reſponſionem, remque examinare, qualiter ab ipſo examinata, atque in Actis recenſita fue-

fuerat. Animadvertens itaque, Catelani principium ab Hugenio non refutatum esse, & ego illud intactum reliqui, sufficere mihi ratus, si Hugenianum responsum simpliciter applicarem ad præsentem controversiam, proposito eum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compositi; ubi innuere saltem volui, quod supposito pro totali ejus celeritate numero ternario (quicquid statuatur de celeritatibus utriusque separatim spectati ponderis, dummodo eæ sint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente Hugenii significare debeant non nisi *rationem altitudinum*, ad quas ascendant separata pondera, minime vero *ipsas altitudines* (quod ipse quoque postmodum indigitavit Hugenius in secunda responsione, 8 Jun. 1684.*) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, se mutuo mensurare non possunt; partim etiam, quia ipse Catelanus urgere saltem videbatur, altitudines esse *proportionales* quadratis, vel *sicut* quadrata celeritatum; tametsi in proxime sequenti calculo quadrata ista pro ipsis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo post, & perlecto Hugenii libro, animadvertebam, Propositionem controversam ex priore Hypothesium, quas Auctor initio stabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi possit, quin simul evertatur altera; quocirca judicabam, si Catelano falsa fuisset visa propositio, eum potius ipsam adoriri debuisse Hypothesin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero cum hujus principii veritatem nullo jure in dubium revocare possem, atque simul etiam seriem ratiocinii a Catelano satis confuse propositi evolvere cœpissem, errorem ejus detexi illico, falsamque cognovi esse, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compositi æqualem esse summæ celeritatum partium ejus separatarum.* Atque ut ostendam, animadversum mihi fuisse errorem, priusquam Hugenii epistola de 8. Jun. lucem aspexisset, afferam hic causam physicam, omissam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compositi celeritas perpetuo minor sit celeritate partium ejus separatarum: Ponamus majoris evi-

den-

* Vide supra pag. 232.

TAB. XXVIII Fig. 3. dentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili D B libere hinc inde moveri posse, sic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in linea recta centrum Terræ versus. Quo posito, constat, utrumlibet pondus sigillatim dimissum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga D B, utpote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; id est si pondus A absque virga certo tempore conficit spatium A H, & pondus B spatium æquale B N, utrumque etiam cum virga, sed sigillatim, dimissum eodem tempore idem spatium A H & B N conficiet. Constat insuper, quod si gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivis ab axe distantiis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum, propterea quoniam exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virga, sive cum virga, sive sigillatim sive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia A H & B N transigere annitantur, & tamen interea pondus A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere nisi ad L, dum pondus B jam est in N, hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam; adeoque residuum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipsum axem D, eundemque premendo aliquam sui partem ibidem insumere & deperdere; siquidem virga hocce casu instar vectis considerari possit, prout extra dubium est; quod si corpus B infinite tarde moveri, id est, firmum & stabile esse intelligatur sicut axis D, corpus A partem sui ponderis æque in axem D atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive est, si quis examinare vellet, quantam partem celeritatis suæ pondus A in premendo axe D consumere debeat, eum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falsitatem Hugenianæ Hypotheseos, inque hac fundatæ Propositionis, detegere posse.

Ro-

Rogantur hac occasione eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum observent corpora mota, quæ ex una parte inninuntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, sed tardius moto: si namque celeritatis excessus, qui hinc inde communicandus est, in eadem ratione distribueretur, in qua distribuitur onus aliquod, quod vecti duobus sustento fulcris impositum est, nimirum in ratione reciproca distantiarum mobilis a fulcris, tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus, summam altitudinum, ad quas ascendunt separata penduli pondera, vicissim nunc minorem esse summa altitudinum, e quibus antea conjunctim descenderant, quod iterum Hugenianam Propositionem everteret.

En calculum: Esto altitudo A L $= 1$ ped.

Altitudo B N $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, ubi descendit separatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquisita in puncto N, quando cadit separatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, quando descendit conjunctim $= x$

Igitur Excessus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus excessus, quæ soli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x, x :: 4, 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum summa $4\frac{13}{17}$ minor est $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamsi commune gravitatis centrum juxta illum altius ascendere deberet, quam descendit, nondum tamen sequatur, repertum fore motum perpetuum, ut sibi persuadet Ill. Hugenius; quoniam in istis abstrahi solet ab aëris resistentia, a diminutione celeritatis, quæ necessario sequitur disruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorum-

 que

que obstaculorum ; prout ipsa quoque hæc aëris resistentia in causa est, cur simplex pendulum motum suum non continuet, ut maxime in Hypothesi Hugeniana ad eandem ascendere debeat altitudinem, a qua descendit.

XI.

Litteræ D^ni Marchionis de l'Hôpital ad D^um Hugenium, in quibus contendit, se regulam hujus Auctoris de Centro Oscillationis penduli compositi demonstrare per causam Physicam, & respondere simul D^no Bernoulli.

Ante aliquot annos, cum admiratione legi eruditum tuum de centris Oscillationis tractatum, & plenissime mihi persuasum est veras esse demonstrationes tuas. Interea cum Acta Lipsiensia nuper mihi ad manus venerint, inveni in actis mensis Julii anni 1686. relationem tuæ hac de re cum D^no Abbate Cateleno controversiæ, à D^no Bernoulli factam, qui tuam sententiam amplectitur, uti certe debent, quicunque aliquem inter Geometras locum se tenere contendunt. Sed attonitus vidi, finem ratiocinii quo utitur, contrarium esse tuis demonstrationibus : unde ad illud sedulo examinandum perductus fui, & cognovi, quod utatur principio verissimo, licet in eodem applicando fallatur ; illud enim principium, uti demonstrabo, ducit ad eandem veritatem, quam probasti in 5^a tua propositione.

TAB. XXVIII. Fig. 6. Sit D A B virga inflexilis & sine gravitate, mobilis circa punctum fixum D, ad quam annexa sint 2 pondera æqualia A & B ; & sit distantia B D a puncto fixo quadrupla distantiæ A D, quæritur longitudo D G penduli simplicis isochroni, id est, quod movetur cum eâdem celeritate ac pendulum compositum.

Ad solvendum hoc problema, considero velocitates, cum quibus corpora A & B incipiunt descendere in primo instanti

ti casus sui, vel potius, spatia, quæ percurrunt eodem tempore, utut parvo; hoc sensu sumo 1 pro velocitate, quacum omne corpus grave sive magnum sive parvum incipit descendere super planis æqualiter inclinatis; nam, ut satis notum est, illa velocitas est æqualis in omnibus corporibus.

Concipio etiam, quantitatem motus corporis initio descensus sui oriri ex massâ multiplicatâ per illam primam velocitatem; His suppositis, constat, quod corpus A conetur descendere cum eâdem celeritate, quâ corpus B; quod cum non possit, quoniam virgæ junctum est in puncto A, cujus velocitas tantum est 4ta pars velocitatis B, debet accelerare motum corporis B in pendulo composito. Tota ergo difficultas consistit in rite determinandâ motûs augmentatione; quod hoc pacto facio.

Sit x quantitas motus corporis A in pendulo composito, residuus excessus quantitatis ejus motus erit ergo $A - x$, vis hæc applicata in A exerit actionem in punctum fixum D & corpus B, quod considerari debet ut immobile ipsius respectu (quoniam clarum est, corpus B debere censeri immobile respectu illius excessus) & consequenter virga B D debet considerari ut vectis cujus extremitates sustinentur in B & D. habebimus ergo B D, 4. ad A D, 1. ut $A - x$ ad $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ portionem excessus quantitatis motus corporis A, quæ communicatur corpori B; ita ut quantitas motus corporis B in pendulo composito sit $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ id est $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$; Jam vero propter virgam inflexilem D B velocitas corporis B in pendulo composito debet necessario esse quadrupla velocitatis corporis A, & consequenter etiam quantitas ejus motus, quoniam corpora sunt æqualia; unde sequitur æqualia esse $4 x$ & $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ unde deducitur valor ipsius x, $\frac{5}{17} A$, qui exprimit quantitatem motus corporis A in pendulo composito; Jam si fiat, ut $\frac{5}{17}$, velocitas corporis A in pendulo composito, est ad 1, velocitatem, omnium corporum gravium in extremitate pendulorum simplicium, ita D A, 1; est ad D G, $\frac{17}{5}$, erit hæc longitudo penduli simplicis isochroni; si enim spatia sunt inter se ut velocitates, tempora æqualia sunt.

 Si

TAB. XXVIII. Fig. 7.

Si addamus ad pendulum compositum D A B novum pondus C æquale cuivis ponderi A & B, ita ut D C duplum sit D A, considerari debent pondera A & B tanquam appensa ad G commune suum Oscillationis centrum, in extremitate penduli simplicis D G; & tunc ponendo x, quantitatem motus corporis C in pendulo composito D C G, habebimus C-x pro residuo excessu quantitatis motus corporis C. Quantitas hæc residua applicata in C exercet vim in punctum fixum D, & punctum G, quod considero ut fixum ipsius respectu; habebimus ergo D G, $\frac{17}{7}$, est ad D C, 2, ut C-x est ad $\frac{10C-10x}{17}$, portionem ejus excessus, quæ distribuitur in G; unde sequitur, quantitatem motus corporum A & B in pendulo composito D A C B futuram $\frac{5}{17}A + \frac{20}{17}B + \frac{10C-10x}{17}$ id est $\frac{15C-10x}{17}$; Ob virgam autem inflexilem D B, velocitas corporis A in pendulo composito erit necessario dimidia velocitatis corporis C, & velocitas corporis B erit dupla velocitatis corporis C, & eædem quoque inter motus quantitates rationes dantur, cum tria corpora sint æqualia inter se; datur ergo æqualitas inter $2x + \frac{1}{2}x$ & $\frac{15C-10x}{17}$, unde deducitur quantitas $\frac{2}{7}x = C$, exprimens quantitatem motus corporis C in pendulo composito D A C B. Jam si fiat, ut $\frac{2}{7}$, velocitas corporis C in pendulo composito, est ad 1, velocitatem cujusvis corporis gravis in extremitate penduli simplicis; ita D C, 2. est ad D E, 3, erit hæc longitudo penduli simplicis isochroni.

Si pondera A, B, C essent inæqualia, inveniretur semper, sequendo hoc ratiocinium, centrum Oscillationis. ita ut hæc methodus sit generalis, quicunque sit ponderum numerus, & quæcunque eorundem inæqualitas. Ostendendum nunc, methodum hanc etiam usu venire, si pondera sint ad puncti fixi partem utramque disposita.

Sit pendulum compositum A D B mobile circa punctum fixum D, & oneratum ponderibus æqualibus A & B, sitque D B quadrupla ipsius D A, patet quod corpus A debeat retardare motum corporis B in pendulo composito; & ut præ-

præcise inveniatur quantum retardet, voco x quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B, & consequenter excessus residuus quantitatis ejus motus erit B - x; sed ob virgam B A, velocitas corporis A debet necessario esse quarta pars velocitatis corporis B: quantitas ergo ejus motûs in pendulo composito erit $\frac{1}{4}$ x (cum enim corpora A & B sint æqualia quantitates motus sunt proportionales velocitatibus. Illa autem motus quantitas produci non potuit, nisi per residuum excessum quantitatis motus corporis B. Patet ergo, quod ille excessus B - x debeat superare quantitatem motus corporis A inferiora versus, & eidem præterea imprimere quantitatem motus $\frac{1}{4}$ x superiora versus; id est quod debeat agere in corpus A ac si vis A + $\frac{1}{4}$ x immediate applicita in A, illud sursum propelleret. Sed vis B - x ob punctum fixum D agit in A acsi vis 4 B - 4 x immediate applicita in A, illud sursum propelleret; dabitur ergo æqualitas inter 4 B - 4 x & A + $\frac{1}{4}$ x: unde deducitur quantitas x = $\frac{12}{17}$ B, quæ præcise exprimit quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B; Porro si fiat, ut $\frac{12}{17}$, velocitas corporis B in pendulo composito, est ad 1, velocitatem corporis omnis gravis in extremitate penduli simplicis, ita D B, 4. est ad D G $\frac{17}{3}$, erit hæc longitudo penduli simplicis Isochroni.

Facile concluditur ex his omnibus, principium D[ni] Bernoulli esse verum; sed eundem falli in conclusione quam inde deducit; quoniam considerat velocitates acquisitas corporum A & B, cum considerare deberet, uti nos fecimus illorum velocitates incipientes & præterea motus quantitates. Alias enim nunquam posset applicari hoc principium, quod non differt à principio, quod obtinet circa vectem, quum corpora sunt inæqualia; Adeo ut credam me plane petitioni ejus satis fecisse, *Rogantur hac occasione eruditi* &c.

Vides, quo pacto diversæ viæ ducant ad cognitionem ejusdem veritatis; nolim tamen meam tuæ æquiparare, quæ ultra omnem comparationem eruditior est & magis Geometrica; Interim si existimes, non inutile fore demonstrare rationes Physicas, quas hic affero, perfecte convenire cum

tuis demonstrationibus, idque inservire posse tollendo D^{ni} Bernoulli dubio, per me licet publici juris fieri has litteras, sed simul peto, ut iisdem observationes tuas subjungere digneris, & persuasum habeas me a judicio tuo non provocaturum, quod procul dubio doctum simul clarissimum & æquissimum futurum est: sum ex animo &c.

X I I.

Observationes D^{ni} Hugenii in literas præcedentes & in relationem D^{ni} Bernoulli, cujus in iis fit mentio.

Semper credidi difficile esse inventu centrum Oscillationis aliâ methodo, quam quâ ipse usus sum; neminem quoque vidi, qui id prospero successu tentârit, sive respectu solutionis generalis, sive in casu pendulorum compositorum, quorum pondera sunt in lineâ recta cum puncto suspensionis. Hunc casum D^{nus} Marchio de l'Hôpital sibi post plures alias proposuit, & primus, quod vere possum dicere, speratum sortitus est eventum; nam D^{i} Wallisius, Mariotte, & Pater Deschales quæsiverunt tantum centrum Percussionis, nec potuerunt demonstrare idem esse cum Centro Oscillationis, licet id revera ita se habeat.

Cæterum licet demonstratio Domini Marchionis valida sit & legitima, & naturæ rei congrua videatur, multa tamen continet quæ Lectorem aliquantum detinere queant; ut, quando considerat quantitatem motus corporis in primo initio casus, & quum distinguit & dividit, residuum motum corporis A, scilicet quem haberet cum separatim caderet, præ illo quem haberet, si descenderet veluti pars penduli compositi, & tandem, quum in pendulo trium ponderum vult A & B tanquam fixa considerari in G, centro Oscillationis illorum. cum hæc omnia non sint prorsus evidentia, patet viam, quam ingressus est Marchio, satis esse difficilem, & accuratum valde ratiocinium fuisse requisitum, ne hic deviaretur; D^{us} Bernoulli in sua relatione controversiarum me inter & Abbatem Catelanum, de qua in sequentibus aliquid

quid observabo, eandem viam fuerat secutus, sed cum nec illam ad finem usque sequi potuerit, novo inde ratiocinio ejusdem difficultas colligitur.

Obstrictus sum D^o^ Bernoulli, quod semper in hac controversiâ a meis partibus steterit adversus D^um^ Abbatem Catelanum. Interea non potui concipere, quo pacto, postquam dixit propositionem meam fundamentalem de centro Oscillationis pendere a magno illo principio, scilicet *quod commune centrum gravitatis plurium ponderum non possit ascendere altius per gravitatis eorum effectum, quam unde descendit*, in sequentibus vertat contra me quoddam ratiocinium, quemadmodum ipse confitetur, incertum, ac si posset in dubium vocare veritatem hujus ipsius propositionis; cum potius deberet concludere, se errasse in suo ratiocinio.

Ad id vero, quod mihi imputat, me in prima responsione non refutasse falsum D^ni^ Abbatis principium, idque in ultima non refellisse per causam ejus Physicam, respondeo me in prima responsione credidisse, sufficere, si evidens vitium ostenderem in ratiocinio, quod mihi opponitur, licet ulterius hanc materiam non examinarem; In exceptione autem 8. Junii 1684. pari jure cum D^no^ Bernoulli possem pertendere me id principium refutasse per suam causam Physicam, quoniam ostendi, repugnare illud magno principio naturali *quod corpora gravia sponte non possint ascendere*.

Credo enim, in hoc æque consistere causam Physicam hujus phænomeni, scilicet quod in pendulo composito pondera A & B, cum descenderint junctim ad partem infimam vibrationum suarum, non acquirant simul tantam velocitatem, quantam acquisivissent separatim ex iisdem altitudinibus cadentia, quam in eo, quod pondus A consumat partem sui motus agendo in punctum fixum F, juxta demonstrationem D^ni^ Bernoulli & D^ni^ Marchionis de l'Hospital; Et ad hoc credendum ex eo adducor, quod sæpe pereat pars motus, licet hunc in aliquo affectu edendo consumi, affirmare non possumus, ut in multis casibus percussionis duorum corporum durorum, juxta id quod ob-

ser-

ſervavi, quum in lucem ederem leges ejusmodi motuum in diariò Pariſienſi 1669 menſis Februarii, ita ut minime pro lege naturæ habendum ſit, eandem motus quantitatem ſemper conſervari, niſi alicui impendatur & conſumatur, ſed hæc conſtans lex eſt, corpora ſervare vim *ſuam adſcendentem*, & idcirco ſummam quadratorum velocitatum illorum ſemper manere eandem; Hoc autem non ſolum obtinet in ponderibus pendulorum, & percuſſione corporum durorum, ut ibidem obſervavi, ſed in multis quoque aliis mechanicis experimentis.

Demonſtraveram admittendo principium Abbatis Catelani, *vim aſcendentem* ponderum penduli augeri, & ita commune eorum gravitatis centrum altius poſſe reverti quam unde deſcenderat, unde inferebam, hoc poſito inventum fore perpetuum mobile. D^us Bernoulli non concedit hanc conſequentiam ob aëris obſtaculum, & quædam alia, quæ effectum impedirent: ſed conſiderare debuiſſet, cum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, ſemper determinata ſit quantitas, & effectus obſtaculorum non ſit determinatus, imo minui magis magiſque poſſit, facile conſtrui poſſe machinam, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum, præponderaret impedimento obſtaculorum; ſed revera id experiri neceſſe erit nunquam.

F I N I S.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

I.

Excerpta ex Literis Domini Hugenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactissimorum ac portatilium concernentibus.

CUm invenerim artificium diu desideratum quo fiant Horologia & exactissima simul & portatilia, credo rem gratam me facturum publico, si id communicem. Quamobrem mitto Tibi & descriptionem & picturam formæ, continentem id quod in hoc invento habetur singulare, ut inter cæteras novitates scientiarum, hanc quoque possis inserere, siquidem ita collubuerit, Ephemeridibus Tuis.

Horologia formâ modicâ ad hunc modum constructa, erunt horarum indices portatiles quam exactissimi, sub majori forma autem ubique utiliter adhibebuntur, ac speciatim in longitudinibus terrâ marique inveniendis, siquidem ipsorum motus regitur à principio quodam æquabilitatis, non aliter ac aliorum cum pendulis, per cycloidem quippe ita correctorum, ut nullum vecturæ genus illa possit sistere aut sufflaminare.

convexis vitris modo ordinario, sat superque cognito, perficitur; duo ad inversa objecta videnda, quatuor ad ea erigenda inserviunt. Tubus ex Bractea, aut alio metallo ad Cylindri formam componitur, transitque in annulum aut Cylindrum minorem Cupreum C, qui ipsum in medio includit & illi conferuminatur. Cum annulo duo plana & similia cohærent brachia D & E, unum in superiori parte, alterum in inferiori, utriusque longitudo est fere quartæ partis longitudinis Telescopii, adeo ut tota Machina Crucem imitetur. In brachiorum extremitatibus duplicia fila, per parvulos annulos transeuntia, & inter laminas inserta cum brachiis cohærent. Harum laminarum altera brachio affixa est, dum altera separari potest ut fila inter illas inserantur. Annulo crux suspenditur ex hamo F, dum ope alterius annuli cruci, uti postmodum notabitur, annectitur pondus ejusdem circiter gravitatis cum illa, & in pyxide G inclusum. Ex hac pyxide solus egreditur ponderis uncus. Spatium in pyxide vacuum oleo nucum, lini, aut alio quocunque quod frigore non coalescit repletur, quo motus ponderis & Telescopii illico reprimuntur.

In interiori Telescopii parte filum sericum horizontaliter ad vitri objectivi focum expansum est, sive unum, duo, aut tria adsint ocularia; hoc filum ope cochleæ, quæ circumvertitur in foramine H in Telescopii tubo, elevatur, & deprimitur. Methodus disponendi filum postea explicabitur. I levis admodum ex Cupro annulus est, non majoris ponderis, quam $\frac{1}{12}$ aut $\frac{1}{100}$ partis ponderis ipsius crucis, & qui juxta Telescopii tubum movetur, & ubi libuerit hæret; insuper si Crux non in æquilibrio est, alter annulus in interiori Telescopii parte sufficientis ponderis apponitur, ut æquilibrium detur, id est, ut Telescopii tubus Horizonti parallelus fiat, in quo tamen summa cura haud requiritur.

Plana Crux ex ligno Machinæ suspensioni inservit, ad hoc superne uncus F habetur, & in brachiorum altero furca K majorem Telescopii motum lateralem reprimens, ita ut per spatium semilineæ, id est $\frac{1}{24}$ pollicis, tantum agitari possit.

 Pyxis

Pyxis plumbum, & oleum continens eidem Cruci annectitur, ad latera, & fundum inclusa; ut autem ventus a Libella arceatur, cava crux L planæ ligneæ cruci cum duobus aut tribus hamis annectitur, adeo ut integra tum conficiatur pyxis.

Ut usui libella accommodetur, ac rectificetur, ut dictum suspenditur, plumbo non infernè annexo, & in quoddam distans objectum collineatur, attendendo ad punctum quod Horizontale filum obtegit, filum enim distincte, ut objectum ipsum observari potest. Deinde plumbum addatur, id est annulo inferiori jungatur, si tum Horizontale filum eidem objecti puncto respondeat, constabit crucis centrum gravitatis exacte dari in recta linea quæ duo suspensionis puncta conjungit, id est quæ transit per puncta quibus fila brachiis annectuntur. Hæc est primaria requisita præparatio: verum si hoc minime reperitur, res facilè perficitur ope annuli I, observando, annulum vitrum objectivum versus promoveri debere, si Telescopium declinat, dum pondus annexum est; contra retrahi debere, si Telescopium post annexum pondus elevetur.

Ubi ergo ita constituta est Machina, ut ad idem punctum appenso & sublato pondere visum dirigamus, invertenda est, suspendendo eam ex annulo inferiori, & plumbum brachio alteri annectendo; quia citius motum sistere jubet, & quia hoc ad reliqua quæ supersunt perficienda plurimum conducit.

Quod si tunc filum in Telescopio, uti antea collineando, punctum idem ac in præcedenti observatione obtegat, punctum hoc in eodem plano Horizontali cum centro tubi Telescopii existere certissimum est, quemadmodum demonstrabitur.

Verum si filum punctum idem collimando non obtegat, elevando & declinando filum, ope cochleæ huic usui adaptatæ, eo poterit reduci, elevando nempe filum si ad punctum magis elevatum visus dirigatur, & contra, Telescopium post singulas fili mutationes invertendo.

His peractis Instrumentum perfecte erit rectificatum, nec obstat

obstat (quod notabile est) si lentium axes non per harum centra transeant, aut si ipsæ non exacte in recta linea collocentur; & consequenter secure Machina utemur, dummodo nulla superveniat mutatio; filum namque Horizontale cujuscunque objecti, ad quem fiet collimatio, indicabit locum qui est in eodem plano Horizontali cum centro Telescopii; si autem mutatio quædam detur, in singulis observationibus detegi potest, primo cum plumbo annexo, deinde sine plumbo collineando, & tandem Telescopium invertendo. Et hoc utique præcipuum est, quo Libella præ cæteris gaudet commodum, quod in usu erroris periculum nullum detur.

Pes, quo Machina innitatur, est rotunda ferri, aut bracteæ lamella modice concava, cui annectuntur tres baculi longitudinis circiter trium pedum cum semisse, pyxis huic lamellæ imposita hanc in tribus punctis, tangit, quare facile movetur, & ita constituitur, juvante cavitate lamellæ, ut plumbum in pyxide sua libero fruatur motu, quod videtur trans aperturam M in operculo ligneo.

Gravitas plumbi, ut pyxis firmiter pedi inhæreat, inservit, verum si firmius eam sustentari velimus in lamellæ cavæ medio foramen fiat.

Si totum pondus in pyxide G recludi nolumus, tertia vel quarta tantum pars huic includatur & reliquum eidem ferreæ caudæ annectatur, sed extra pyxidem; primo tunc observabitur cum minori pondere solo, pyxide contento, tum cum altero desuper addito, in constituendo filo Horizontali ambobus utentum.

Hac methodo Telescopii agitationes promptissime, in omnibus observationibus quæ ad rectificandam Machinam instituuntur, cessant; si autem nullum in quibusdam observationibus imponatur pondus, hæ motiones difficilius sistuntur.

Uncus F, cui Libella appenditur, simpliciter ligneæ planæ cruci annecti potest, licet hic annexus apparet annulo, qui ope cochleæ adhærentis annulo, quo Machina defertur, elevari & deprimi potest.

Quan-

Quantum hoc prosit, experitur in ipsius translatione, nam tum crucis fila laxari queunt curando, ut supra furcam K, & brachium exiguum curvatum R, descendat Telescopium, ne quidem thecam ligneam aperiendo.

Ne oleum pyxide G contentum ex hac defluat, dum Libella in itineribus confertur, pyxidis hujus foramen ipso pondere incluso claudi potest; curabitur ad hoc, ut pondus illud desuper planum admodum sit, & detineatur juxta pyxidis operculum ope annuli cochleati S.

TAB. XXIX. Fig. 1. Tubus N, illum in magno repræsentat, cui in interiori Telescopii parte Horizontale filum cohæret, continet elastrum O P furcæ Q annexum, cui sericum filum cera affigitur; hoc elastrum furcam ad frustum bracteæ T trahit, quod ingreditur cochlea, quæ respondet foramini H in tubo Telescopii, quo dato foramine etiam modice tubus N verti potest, ut filum exacte fiat Horizontale, de quo judicatur per Telescopium videndo.

Rectificationis Libellæ Demonstratio.

Rectificationis requisitum primum fuit hoc; ut centrum gravitatis suspensæ crucis in recta linea per puncta, quibus fila brachiis annectuntur, transeunte daretur. Ut hujus præparationis necessitas concipiatur, sciri oportet, non sufficere si Telescopium ex utroque annulo successive suspensum ad idem objecti punctum dirigatur, hoc enim fieri potest, licet objecti punctum multum infra, aut supra Horizontale planum inveniatur. TAB. XXIX. Fig. 4. Sit A B Cylindri Telescopiani axis, sit C I suspensionis, aut nexuum filorum linea, quarum linearum longitudinum hic non habetur ratio, quoniam, cujuscunque magnitudinis Telescopium sit, nihil hoc ad suspensi corporis situm conferre, notum est: ponimus A B, C I se mutuo ad angulos perfectè rectos secare in puncto H. Desuper centrum gravitatis crucis in E, ponatur in axe A B, magis tamen versus B, quam punctum H; Cruce itaque suspensa in C, linea quæ a C ad centrum terræ tendit erit C E,

ita

ita ut axis A B declinaturus sit infra Horizontale planum, cui C E perpendicularis est, & cum quo efficiet angulum æqualem angulo H C E; si vero visus radius A B filum Horizontale, & vitri objectivi B centrum pertransiens continuetur in recta linea ad objecti punctum usque; istud punctum infra Horizontale planum tunc esse futurum, evidens est; Invertendo interim Telescopium, & hoc per I suspendendo, ita tamen, ut extremitas B ad eandem partem remaneat, facile patet eundem situm, quem suspensum per C habebat, eum acquirere; quia, directionis linea denuo per punctum E transibit: igitur juxta filum Horizontale, uti antea collineabimus ad idem objecti punctum; licet minime æqua sit Libella.

Per primariam rectificationis partem, defectus hic detegitur, & corrigitur: nam primo si gravitatis Crucis centrum existit in H, directionis linea erit C I, & constat, pondere in I annectendo, crucis situm non mutari; & idcirco per Telescopium ad idem punctum, collineabimus; sed si centrum gravitatis crucis sit in E, & pondus in I appendatur, extremitas B elevabitur, & ideo visus per Telescopium ad punctum magis elevatum, quam ante, dirigitur. Quod aperte videtur ducendo lineam I E, eamque dividendo in K, ita ut pars I K sit ad K E, uti crucis pondus est ad pondus in I annexum; nam commune centrum gravitatis erit K, & C K directionis linea: & angulus K C E æqualis erit illi, quo elevabitur Axis A B. Quia linea C E supra C K tali angulo elevatur, & quia A B cum C E eundem quem ante efficit angulum.

Ut vero clare pateat, appendendo pondus in I sufficienter detegi, an centrum gravitatis crucis detur extra suspensionis lineam; dico, angulum K C E, posito pondere appenso æquale ponderi ipsius crucis, sensibiliter æquari; anguli I C E, qui æqualis est angulo quo Axis A B, & ideo quoque Visus Radius, magis deprimitur versus partem B, quam fecisset, si centrum gravitatis crucis in H fuisset; nam ducendo K L parallelam ad E H, in duas partes æquales dividet H I, &

 H N

H N valebit ¼ lineæ L K, aſt L K eſt dimidium H E; ergo H N eſt ⅛ ex H E, & N E ideo ⅞ ex H E, ſed uti E N eſt ad E H, ita ſenſibiliter angulus E C N eſt ad angulum E C H quia exigui ſunt, id eſt E C K ad E C I.

Cum autem angulus E C K illi æqualis eſt, quo Teleſcopium elevatur addendo pondus in I, ſequitur exiguum pondus P verſus H retro trahendum eſſe ut magis elevetur Teleſcopium, ita tamen ut prima elevatio dupla ſit ſecundæ, quia angulus K C E duplus eſt K C I; & tunc directionis linea erit C I, in qua neceſſario gravitatis centrum crucis exiſtet, quandoquidem centrum gravitatis ponderis in I appenſi, in hac datur, uti & centrum gravitatis commune ejusdem ponderis & crucis, cujus pars eſt exiguum pondus P. Si annectendo pondus in I Teleſcopii extremitas B deprimatur, dimidia ſua parte augenda erit depreſſio, quod eodem modo demonſtratur. Hæc angulorum cognitio, ad primam Libellæ præparationem faciliorem reddendam uſu venit.

Quod aliam verificationis partem ſpectat, ubi centrum gravitatis crucis eſt in C I, ſuſpenſionum linea, ex ante explicatis ſequitur, hanc lineam eſſe perpendicularem ad Horizontem, ſive crux per C, ſive per I ſuſpendatur, & ſive illi ad infra pondus annectatur, ſive crux ſola ſuſpendatur.

TAB. XXIX. Fig. 5. Tandem, poſitâ brachiorum ut & filorum æqualitate, certiſſimum eſt, centrum Cylindri Teleſcopii, quod ſit H, ad eandem in utraque ſuſpenſione altitudinem dari: ſint itaque D H M, E H P, axis Cylindri in una, & altera ſuſpenſione, ponendo primo, quod differentibus gaudeat poſitionibus, ſit O objecti punctum, ad quod juxta filum Horizontale collineamus, & O M, O P, Radii luminis, qui a puncto O tendunt ad centrum aperturæ vitri objectivi, & inde æque ac omnes alii radii, qui a puncto O ad vitrum objectivum perveniunt, Horizontali filo obviam proficiſcuntur, ſive filum iſtud Teleſcopii axem pertranſeat, ſive non; hoc namque per Dioptricæ leges ſequitur, cum filum punctum O tegere videatur, & utrumque diſtincte appareat. Ductis lineis rectis H O, M P, ultima parallela erit C I, quia H M, H P

H P sunt æquales, ac æqualiter inclinatæ ad C I. Ergo anguli M, P, trianguli M H P sunt æquales; ast angulos H M O, H P O etiam esse æquales certum est, nullo habito respectu ad id, quod radiis O M, O P intra Telescopium accidit, nec si vitri objectivi axis per hujus centrum transeat, id est, an maximam suam in centro habeat crassitudinem. Anguli igitur M, P, trianguli M O P similiter æquales sunt, & triangulum hoc est Isosceles, uti M P H; recta idcirco H O secabit M P ad angulos rectos; sed M P parallela erat C I, O H ergo perpendicularis est C I, & idcirco punctum O in eodem plano Horizontali cum centro H Telescopii, quod probandum erat.

Si nunc centrum vitri objectivi M, P, in utroque casu detur in eodem puncto ut S, recta H S perpendicularis erit C I, quandoquidem anguli C H S, I H S tum æquales sint, propter Telescopii inversionem, verum quia S O tendit ad idem punctum O in ambabus suspensionibus, necessario erit in eadem recta linea cum H S, si enim lineæ hæ angulum conficerent, angulus iste superne in una suspensione esset dum in altera situm contrarium haberet, sicque juxta filum ad duo distincta puncta collinearemus, cum ad unicum punctum id fieri posuimus; sed integra igitur linea O S H est perpendicularis ad C I, ideoque punctum O in eodem datur plano Horizontali cum puncto H.

III.

Astroscopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata.

QUod plerisque omnibus accidit novis inventis, ut, à parvis orta initiis, cura & tractatione hominum auctiora fiant ac perfectiora, id vel præcipue, in admirando illo proferendi visus artificio, usu venisse animadvertimus. Notum est enim quàm fuerit à prima origine tenue ac pene nihili, cum rudimenta ejus quædam, in Portæ Neapolitani libris, ob-

obſcure expoſita conſpicerentur; quibus tantum præcelluere noſtratium hominum conatus, ut non ſane immerito primi ejus inventores haberentur. Hos vero rurſus longiſſime prævertit Galilæus, tot tantiſque rebus, tubi ſui opera, in cælo deprehenſis, quarum nihil quidquam ante ipſum fuerat perceptum. Videbatur nihil præſtantius iis, quæ ſibi paraverat, organis repertum iri. At, ſi nunc in vitam redeat, quis dubitet quin ſuis ipſe multo præpoſiturus ſit ea quæ deinde exſtiterunt; tum noſtra, quibus Saturni planetæ veras figuras annulumque primi conſpeximus; tum magis etiam, quæ his ſucceſſerunt Italica, ab egregiis artificibus elaborata. Quibus uſus Vir Clariſſimus Dominicus Caſſinus, alia inſuper nova phænomena cœlo deduxit; planetariorum globorum in ſeſe revolutiones, comiteſque Saturni duos, præter eum quem nos repereramus, reliquis manifeſtiorem.

Quod ſi attendamus quibus acceſſionibus in tantum hæc ars continue creverit, nihil aliud reperiemus niſi auctam tuborum longitudinem, lenteſque, quas vocant, vitreas in ſphæræ majoris convexitatem diligentius conformatas. Etſi enim modos quoſdam alios, compendiaque inveſtigaverint viri ſubtiliſſimi; jam conicarum ſectionum præſcriptis figuris, quæ vitro inducerentur; jam ſpeculorum reflexionibus radios lucis colligendo; certum eſt hæc omnia vel fruſtra fuiſſe, vel votis & expectatione longe minora, ob cauſas quas exponere non eſt hujus loci; unamque adeo rationem, qua proficeretur, hactenus eſſe relictam, tuborum productionem. Et ſane, quanto magis rei ipſius naturam intueor, tanto propius eſt ut exiſtimem, nihil alia via ne impoſterum quidem eſſe ſperandum.

Optime igitur operam ſuam ij collocaſſe videntur, qui parandis tubi majoris lentibus incubuerunt. Quorum diligentiæ ſucceſſus hac in parte non defuit. Sed aliunde non exiguum oblatum fuit incommodum, nimia tuborum longiorum gravitas ac moles; quibus movendis neceſſario machinæ in auxilium advocandæ fuerunt. Hæ vero & in iis quæ nunc extant, pedum triginta aut quadraginta, longitudinibus difficile conſtruun-



ſtruuntur tractanturque; &, ſi ulterius progrediendum ſit, multo plus exhibituræ ſint negotii. Adeo ut hic velut obex quidam fixus fuiſſe videatur ad majora tendentibus. Quare rem inprimis gratam me facturum arbitror hæc ſtudia colentibus, ſyderumque obſervationi intentis, ſi, quod nuper inveni, oſtendero qua ratione impedimentum illud omne ac tædium tollatur; magnoque temporis, operæ & ſumptuum compendio, maxima quæque teleſcopia ad hæc ſpectacula adhibeantur. Scio inter cætera quæ in hunc finem propoſita fuere, hoc quoque, quod hic adferimus, aliis in mentem jam à multis annis veniſſe, ut ſine tubo lentes diſponerentur; ſed quod volebant efficere eos nequiiſſe, niſi machinatione quadam difficili nimium, quæque propterea adhuc exitum non habuerit. Nos autem quæ docebimus, reipſa utilia eſſe invenimus, idque magno commodo noſtro quotidie experimur. Ea vero ſic ſe habent.

Loco patente & undique aperto, malus in terram defigitur, ad perpendiculum erectus. Noſter, quo primum uſi ſumus, pedum quinquaginta altitudinem habebat; teleſcopiis nempe pedum 70 & amplius ſuffecturus, quanquam non in omni ſyderum ſupra horizontem aſcenſu. Deberet enim non multo infra totam teleſcopii longitudinem produci. Hujus, priuſquam erigatur, latus unum dolabra complanatur, atque ibi regulæ binæ affiguntur inter ſe parallelæ, ac ſeſquipollice diſtantes, itaque canalem efficientes, interius paulo latiorem, qui à ſummo malo ad imum fere pertingat, reliquis tantum pedibus tribus vacuis. Præterea in ipſo mali cacumine, orbiculus imponitur, circum axem mobilis, inque eum funis ducitur dupla mali longitudine, craſſitudine minimi digiti dimidia. Utque eo, ſi forte opus ſit, aſcendi poſſit, triangula lignea æqualibus ſpatiis defiguntur, quibus ſcandentis pedes inſiſtant. Ita demum paratus malus erigitur, parte ea, qua terra tegendus, illita pice, circumdataque arena, quo minus putredine corrumpatur. Uſus mali eſt, ut lens major ejus opera in altum tollatur quouſque opus eſt; quod fit hoc modo.

 Aſſer-

Afferculus bipedalis uno latere ita inciditur, ut intra canalem, quem diximus, liberrime moveri queat. Hujus medio affigitur brachium itidem ligneum, pedem unum à malo exftans, cujus in extremo aliud fesquipedale, media item fui parte, conjungitur rectis angulis. Utrumque vero Horizonti parallelum extenditur. Huic transverfo brachio lens imponitur ea qua dicemus ratione, atque omnia furfum adducuntur, adnexis afferculi extremis ad funem ante demonftratum; qui ab imo malo ad fummum afcendens, ac fuper orbiculum transiens, inde defcendit rurfus ac, priufquam terram attingat, in fui ipfius caput alterum innectitur. Habet autem funis is adjectum plumbum, pondere æquali quantum eft brachii mobilis cum lente impofita; eoque loco deligatum, ut ad fummum malum pertingat, cum lens in imo confiftit. Ita hæc facillime ad eam quæ requiritur altitudinem erigitur &, omiffo fune, fponte ibi fufpenfa manet. Forma plumbi parte utraque in coni apicem definit, ne obhæreat ad triangula quæ per malum defixa diximus.

Cæterum lens hæc telefcopii major collocatur aptaturque hoc modo. Primum in annulum feu cylindrum cavum, è ferri bractea fabricatum, ipfa includitur, longum digitos quaternos. Huic cylindro, five alteri potius in quem hic inferitur, bacillus pedalis, digiti craffitudine, extrinfecus fecundum latus affigitur, totus in partem unam prominens. Hæc omnia globulo æneo infiftunt, avellanæ nucis magnitudine, qui bacillo cohæret, inque fubjecto fui moduli cavo liberrime volvitur; ita tamen ut excidere nequeat. Cavum partibus duabus conftat, quæ, fuper pediculo tereti, cochlea junguntur adftringunturque, fed ita ut globulum nihil prorfus premant. Lens igitur, cum bacillo fibi adfixo, hoc modo mobilis efficitur. Quæ porro ut æqualiter librata confiftat, pondus unius libræ circiter infra bacillum appenditur, filo æneo craffiore femipedali conjunctum atque infixum. Cujus flexu facile ita pondus temperatur, ut centrum commune, fuæ lentisque gravitatis, cum centro Sphærulæ conveniat, atque hoc pacto quocunque pofitu lens fufpenfa maneat,

maneat, attactuque leviſſimo moveatur. Qua in re potiſſima verſatur inventi pars. Pede enim globuli in foramen transverſi brachii, quod ſupra deſignavimus, immiſſo, (duo autem vel plura ejusmodi foramina fiunt, ut in omnem cæli partem commode lens obverti poſſit) filum vel funiculus tenuiſſimus bacillo, ſive caudæ extremæ, illigatur; juncturus nempe lentem majorem cum ea quæ oculo proxima ponitur, ac proinde futuri teleſcopii longitudinem æquans, vel potius paulo excedens. Hinc, ubi ſublata ad malum fuerit lens, quocunque id filum, manu leviter tractum, circumferetur, lentem una movebit, eamque hoc modo ad aſtrum quodcunque recta opponet. Quod certe absque hoc libramento fieri non poſſet. Cæterum ut extento filo cauda ſeu bacillus, quem lenti adpoſuimus, parallelus fiat, quod omnino neceſſe eſt, infigitur parti ejus extremæ ſtylus æreus digiti longitudine, cui deorſum flexo, donec cuſpide ſua tantundem ac centrum globuli infra bacillum deſcendat, ita demum filum, quod diximus, adnectitur. Cur autem ſtylo flexili hic utamur poſtea dicetur.

Jam vero & de oculari lente explicandum, quomodo cum priore componatur; quod multis verbis non indiget, ſiquidem eadem fere omnia, quæ in majori lente, obſervanda ſunt. Similiter enim tubo, ſeu cylindro brevi, hæc quoque includitur; item bacillo ſeu caudæ conjungitur; quæ porro globulum ſuum cui innitatur habet. Sed hujus loco axiculus transverſus adhiberi poteſt. Infra bacillum vero pondus exiguum rurſus appenditur, quanto opus eſt ad faciendum libramentum. Porro capulus, globulum vel axiculum ferens, manu obſervatoris apprehenditur; bacillus lentem majorem ſublime poſitam verſus, directus eſt, filo eidem, quod inde deſcendit, illigatus. Adducta vero manu, contentoque leviter filo, parallelas inter ſe fieri lentes perſpicuum eſt. At non eodem modo, bacilli hujus extrema parte, filum adnectitur, ac ſuperiori illi, qui lentem majorem dirigit, ſed per foramen trajectum, inde verticillo involvitur, cujusmodi ſunt quibus teſtudinum chordas intendunt; qui verticillus medio

medio bacillo à latere infixus est. Hujus conversione, inter observandum, fili longitudo producitur contrahiturve, donec intervallum inter lentem utramque, oculo spectatoris exacte conveniat, postquam antea prope verum fuerit repertum, quod est facillimum.

Vide Auctarium. pag. 271.

Cæterum, quo possit observator immotam detinere lentem sibi proximam, quod apprime necesse est, fulcrum quoddam præsto est è levi materia compactum, duobus pedibus insistens, ac superiori parte transversum habens baculum, cui brachia utraque, sive stantis sive sedentis, innitantur; dum altera manus, quomodo diximus, lentem sustinet. Multoque expeditior est hæc ratio, atque ad usum accommodatior, quam si tertius pes fulcro accedat, inque ipsum lens ocularis imponatur.

Ut vero noctu, atque in tenebris, stellæ quævis telescopio nostro facile reperiantur, lumine utimur laternæ incluso, quales jam vulgo notæ sunt, vitri convexi vel speculi opera longe lucem projicientes. Hujus radiis ad malum lentemque in eo hærentem directis, ubi circulus ipsam continens conspectus fuerit, facile eo transfertur visus, ut stella ipsi media lente tegatur, simulque admota lente minori, per utramque se spectandam præbeat. Ac sane multo citius hoc peragitur, quam factum sit hactenus telescopiis tubo instructis. Adeo ut hoc quoque nomine longe præstet nova hæc observandi ratio. Lunam vero contemplari volentibus, lucerna nihil opus est, quod ipsius astri luce lens conspici possit. Sed hic ob disci lunaris amplitudinem; ne partem quampiam intuenti, ab alia parte lux, aliaque via quam per majorem lentem, ad oculum accidat; circulus papyraceus lenti huic circumponitur, paulo majore quam dupla diametro ad eum quo tota Luna tegeretur. Quod nisi fiat, dilutiores apparent umbræ tractusque ii qui, cæteris obscuriores, in ejus globo conspici solent. Atque ita jam telescopii nostri aërii rationem omnem & apparatum explicuimus, non sane operosum; filoque illo, velut Ariadnæo, unde hactenus inventus non erat, exitum reperimus.

Cæ-

Cæterum quo clarius ea, quæ diximus, intelligantur, delineationem hic subjicimus, in qua

Malus est, a b. TAB. XXI

Asserculus in canali mobilis, c d.
Brachium ipsi ad angulos rectos infixum, e.
Baculus transversus in quem lens imponitur, f f.
Funis in se rediens, g g.
Plumbum funi innexum, h.
Orbiculus in summo malo, a.
Cylindrus cavus lentem primariam continens, i.
Bacillus cylindro affixus, k l.
Globulus æneus bacillo hærens & in subjecto cavo volubilis, m.
Plumbum filo æneo junctum, n.
Stylus brevis ac flexilis, extremo bacillo insertus, l.
Tubulus minorem seu ocularem lentem ferens, o.
Bacillus tubulo affixus, p.
Axiculus mobilis, q.
Capulus manu tenendus, r.
Glans plumbea, s.
Verticillus cui filum involvitur, t.
Pinnulæ decussatim positæ, atque ita foramen efficientes quo filum trajicitur, u.
Filum tenue bombycinum, l u.
Fulcrum cui spectator innititur, x.
Laterna, y.

Triangula per malum disposita, quibus conscendi possit, omissa sunt, ne figuram obscuriorem redderent.

Superest ut nonnulla, quæ fortasse nondum expertis scrupulum injicere possent, paulo accuratius examinemus. Verebuntur primum ne, subsidente filo quod ad utramque lentem pertingit, flexus ejus, quanquam exiguus, in magnis tamen illis, pedum centum aut ducentorum, longitudinibus impediat positum earum parallelum. Et profecto, si fune graviore opus foret, non parum noceret curvatura ejus, nullaque fere tendendi vehementia superari posset hoc incommodum. Nunc verò, suspensa librataque lente majori ut à no-

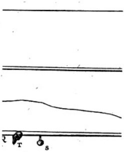
bis factum est, levissimi tantum fili bombycini tractu eam dirigimus; cujus pondus in pedes quinquaginta semidrachmam non superat; quodque idem appensas libras septem sustinet priusquam rumpatur. Quare flexus ejus neque in hac, neque in multo majori lentium distantia quidquam officit, etsi non nisi modica vi trahatur, duabus tribusve æquipollente libris; utique cum geometrica perfectio nequaquam hic requiratur, ut cuilibet experto notum.

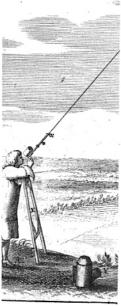
Etenim certum est eadem ratione, qua funis fune levior est, vim tensionis diminui, qua utrumque ad rectam lineam æqualiter accedat. Ut proinde funiculus quinquaginta pedes longus, atque unciam pendens, vi librarum quadraginta octo opus habeat, ubi filum nostrum, longitudine pari, non nisi tribus libris indigebit. Atque hoc per se clarius est quam ut demonstratione comprobetur. Idem enim est prorsus cum sexdecim funiculi semidrachmales trahuntur singuli trium librarum pondere, atque cum uncialem funiculum simul componentes, is à conjunctis itidem sexdecies ternis libris contenditur.

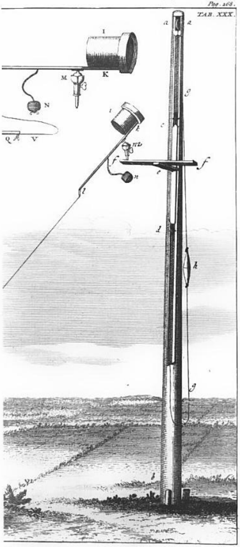
Sed ulterius quoque hæc, quæ ad fili flexum attinent, geometriæ rationibus, experimentisque expendi possunt. Nempe contentum filum, flexu illo exiguo, parabolicam lineam tam prope exprimit, ut pro vera absque errore habeatur. Cujus parabolæ profunditatem, in longitudine pedum centum quinquaginta, invenimus pedis unius circiter quartam partem; cum filum horizonti parallelum tenderetur, nec nisi vi librarum duarum & semis. Sit fili parabola *a b c*, profunditas ejus *d b*, ducta nimirum recta *a d c*. Porro tangant parabolam rectæ *a e*, *c f*: quibus occurrant *c e*, *a f*, parallelæ *d b*. Intuenti igitur ex *a* puncto, secundum rectam *a e*, notatum fuit spatium *c e* fieri pedis unius; unde fit *d b* pedis quarta pars. Ipsi vero *c e* æquale est *a f*. Itaque lentem in *c* positam ita trahit filum *c b a*, ut non ad oculum, qui est in *a*, sed ad *f* punctum directe opposita sit. Ut proinde pedis unius intervallo à vero loco oculus absit: quod in illa pedum 150 distantia nihil obesse potest. Fit enim angulus

TAB. XXXI. Fig. 1.

defle-


T
S




TAB. XXX.
a
a
I
K
M
N
Q
V
i
k
m
n
f
f
e
l
g
c
d
h
g
b

deflexionis *c a e* vel *a c f* tantum duarum quintarum unius gradus; adeo ut remedio, quod tamen dabimus, non sit opus. Sumpta autem *g h* distantia prioris dupla, seu pedum trecentorum, ut filum incurvum sit *g b h*, erit cavitatis mensura *k b*, prioris *d b* quadrupla quidem, sed angulus deflexionis tantummodo duplus, hoc est, ⅘ unius gradus; ut facile perspicitur, ducta tangente *g l*, quæ cum perpendiculari *h l* conveniat. Ipsa enim *b l* quadrupla erit ad *k b* sive *c e*; distantia vero *g h* ad *a c* erat dupla. Quare angulus deflexionis *h g l*, antea inventi *c a e*, duplus censeri potest.

Hæc verò, scrupulorum 48, aberratio nullius adhuc momenti est, neque neglecta nocebit. Attamen, quo minus causandi locus hic supersit, ostendam jam quænam adhiberi possit correctio, atque ejusmodi quidem ut, una opera, omnem aliam lentis declinationem restituat.

Igitur semel ab initio, ad superiorem lentis magnæ præparationem, hoc quod dicemus, adjungatur. Nempe lente quemadmodum præcepimus librata, atque ad oculi altitudinem defixa, filum caudæ adnexum manu altera capiatur, eaque oculo admoveatur; altera lucernam juxta teneat. Tum paulatim recedendo, extentumque filum producendo, observetur an duplex flammæ imago circa mediam lentem appareat, ab utraque nimirum superficie ejus reflexa. Id si contingat ubi jam tota fili longitudo exierit, quanta nimirum futuro telescopio debetur, indicio est rectissime lentem ad oculum converti. Quod si altera tantum flammæ reflexio conspiciatur, male collocata erit, sin neutra, pejus. Hic vero jam remedium adhibebitur, ubi cognitum fuerit in quam partem lens declinet. Stylus enim æneus extremæ caudæ adjectus, filumque innexum habens, in partem eandem parumper flectendus est; ac rursus, ut ante, lucernæ reflexio tentanda; idque ita repetitis vicibus faciendum, quoad utraque flammulæ imago in unum convenire conspiciatur. Tensione autem fili utendum mediocri, qualem supra definivimus, duarum aut trium librarum vim referente, eique

quatenus licet adsuescendum. Hoc modo correcta semel lentis positio ad omnes observationes valebit. Neque hic subtiliter nimium objiciat quisquam quod obliquo fili ascensu, cum ad astra dirigitur, paulo minor efficitur flexus ejus à gravitate ortus, quam cum filum idem horizonti parallelum extenditur. Est enim differentia hæc perexigua, præsertim in tanta fili levitate; & lentium parallelismus, ut jam diximus, ad geometriæ leges exactus non requiritur.

Multo magis ventus obesse dicendus foret, filum sinuans atque in latus impellens, præsertim in magnis, quas diximus, longitudinibus; nisi quod tubis quoque idem ventus adversus est, qui concussu ejus tremunt ac vacillant, magno spectantis incommodo; ut propterea sæpe observationibus supersedendum fuerit. Sed quo æquiore animo hæc dispendia feramus, sciendum est, flantibus ventis, semper fere aëris pelluciditatem adeo turbari, etiamsi serenus videatur, ut hoc uno omnis telescopiorum prospectus impediatur; quod exercitatis ignotum esse nequit. Imo & tranquillo interdum ac prorsus sereno cœlo, scintillantibus cum maxime sideribus, frustra tamen telescopia adhibentur; humido vapore quodam aërem obsidente, quo fit ut ad Planetarum corpora respicienti, undatio quædam tremula & fluctuans omnem visus aciem intercipiat. Possetque, ubi hoc accidit, ipsa lentium bonitas suspecta esse, nisi alio tempore ac puriore cœlo fuisset cognita. Idem vapor, ut hoc quoque obiter admoneam, non raro, lenti majori adhærescens, radiorum lucis partem avertit: cui malo, calefacto modice ad ignem vitro, occurritur.

Videamus nunc & illud quod de illustranda lente eadem diximus ad malum subrecta. Quæ si valde procul distet, puta ad ducentorum & amplius pedum intervallum, vix videtur tantum luminis, ut ab observatore cerni possit, acceptura, etiamsi lucerna convexo vitreo juvetur, uti præcepimus. Sed hic intendere amplius lumen licebit, vel aucto lucernæ ipsius ellychnio, vel latiori lente adhibita leniusque convexa, quæ lucem transmissam, etiamsi pari quantitate

acci-

accipiat, minus tamen diffundet, longiusque proinde ejaculabitur.

Quantum igitur ad hæc attinet, nihil admodum referre liquet quænam fuerit telescopii longitudo, sed æque facile qualiacunque in usum deduci. Aliquod tantum discrimen in varia mali altitudine positum esse. Cujus quidem parandæ plures modi suppetunt. Possumus enim, uno statuto malo, alium ejus opera duplo altiorem juxta attollere, ac simul firmiorem reddere, transversis fibulis utrumque conserendo. Ac firmissima quidem fuerit compages hujusmodi, si duo mali humiliores, cum tertio duplæ altitudinis, binis ternisve pedibus inter se distent, in triangulum dispositi, atque uti diximus religati. Qua ratione facile ad centum pedum altitudinem perveniemus. Ad multo majores vero, vel validiori malorum ac trabium substructione utendo, vel ad turrim aut ædificii altioris angulum inferiora ligna applicando; ita ut nihil tamen obstet, quo minus, ab imo ad summum, lens primaria adducatur, per continuum canaliculum, uti diximus, ascendens. Sed & super turri aut domus culmine erigi malus potest, ut ibi adstet is cui funis cura demandata est, ad evehendam demittendamve lentem.

Nec vero præpropera aut supervacua cura hæc à nobis agitari quis putet, quod verisimile non sit his altitudinibus opus fore. Ecce enim, dum hæc scribo, Cassini literis certior fio, lentes quatuor, quarum maxima telescopio pedum centum quadraginta destinata sit, à Josepho Campano, easque præstantissimas Romæ esse perfectas, & ad magnum Galliæ Regem missas. Etsi enim ad cœlestium observationem nondum fuere admotæ, non dubitandum tamen interdiu institutum fuisse earum examen, in atriis porticibusve prælongis unde lux exclusa esset. Nunc vero, hoc nostro invento, utilitas sua tum his lentibus, tum si quæ has longitudine excedentes prodeant, constabit.

Quod si cogitemus quibus modis telescopiorum efficaciam alii augere studuerint; quæ frustra illi quæsiverunt, ea nos levi hac opera consecutos esse videri possit. Sive enim figu-

ris lentium hyperbolicis ellipticisve, ut Cartesius, sive speculis cavis, ut Neutonus, sive alia quavis ratione id aggressi sint, huc omnia redibant ut brevioribus telescopiis, ac minori molimine usurpandis, multum amplificarentur res visæ. Nam neque accurata illa ac scrupulosa superficierum formatio devitari poterat, neque etiam lentium speculorumve magnitudo. quoniam obscuritate nimia, quicquid machinati fuerimus, inutile reddi necesse est, nisi pro ratione percepti augmenti crescant aperturæ quibus primum lux subintrat. Nos vero longitudines quidem non imminuimus, sed ne obessent effecimus, quod fere eodem redit.

Si quis vero jam requirat quousque & quo operæ pretio extendi porro telescopia posse existimem, & num productis longe ultra modum eorum quæ paulo ante diximus, sperandum sit adhuc decuplo propius ad lunam cæteraque astra nos accessuros, quam quo triginta pedes habentibus processimus; quibus tanti itineris partes centum quadraginta novem, una duntaxat reliqua, confectæ sunt: respondebo me certos quidem arti terminos præfinire non posse; huc tamen, quo dixi, nec maximo hominum conatu perventum iri. multoque minus futurum, quod aliqui videntur non desperasse, ut lunam ac Planetas cæteros velut è propinquo inspiciamus, & utrum animalibus habitentur, an præter vastas solitudines nihil habeant, visu penetremus. Primum enim, in parandis lentibus, scio quantopere crescat cum magnitudine formandi difficultas; ipsiusque inveniendi vitri quod vitiis iis careat, quæ maxime huic operi infesta sunt. Quanto enim ulterius radii colligentur, tanto magis hæc vitia se prodant necesse est. Constat præterea, ut jam ista nihil obstent, non amplificari res visas, nisi pro ratione diametrorum aperturæ lentis exterioris. Quæ diametri nequaquam crescunt cum telescopiorum longitudine; sed, quantum video, rationem longitudinum subduplam sequuntur. Adeo ut data apertura pollicum trium, in telescopio triginta pedes longo; quantam circiter experientia concedi sinit; alia, ad trecentos pedes, non nisi novem unciarum & semis sit futura,

futura, ac propterea tantum triplo majora fere omnia sint apparitura, prægrandi hoc telescopio, quam illo pedum tricenum. At si decuplo excessu idem superandum sit, jam ter mille pedum longitudine opus erit, quo quidem nulla humana ope perveniri posse, vel solius altitudinis causa, manifestum est.

Sane majores multo forent, & majori proportione crescerent, eæ, quas diximus, aperturæ, si nihil aliud obstaret quam figuræ sphæricæ parum idonea, in colligendis radiis, curvatura. Nunc vero alia quædam, ex ipsa refractionis natura, oritur radiorum aberratio, quam ante annos aliquot Neutonus egregiis quibusdam experimentis & prismatum vitreorum coloribus comprobavit. Hæc vero & ipsa leges suas habet, quibus, si recte eas perspicio, subdupla illa, quam dixi, aperturarum ad longitudines ratio colligitur.

AUCTARIUM.

Videbatur jam perfecta absolutaque omnibus numeris nova Astroscopia nostra; typisque excusa, nondum tamen edita erat; cum secundis cogitationibus, ut fit, alia quædam nobis in mentem venere, quibus ea melior commodiorque fieret. Quæ cum auctarii vice hic adponere visum sit, simul hoc monemus, ut, sicut posterius reperta fuere, ita ultimo loco, postquam reliqua descriptio ac delineatio percepta fuerit, legantur.

Cum primum spectatores invento nostro, ac Planetis nacti sumus, telescopicis observationibus minus assuetos, docuit experientia, eos quidem per se difficilius stellæ conspectum consequi; sicut antehac quoque, ubi in grandiores tubos inciderant, eveniebat. Quod autem hic fieri solitum, ut, reperto prius sidere, ac manente tubo, tantummodo oculum ei spectator jussus admoveret, id non perinde nobis nunc imitari licebat; cum lens oculo proxima, ubi desigeretur, non haberet. Itaque hic quoque ratio fuit excogitanda, qua positum suum servaret ocularis lens. Quod quidem præstitimus

mus machinæ exiguæ opera, quæ fulcro bipedi, in descriptione designato affigitur; ut in figura adjecta videre est.

Transversarii namque in summo fulcro pars est *a a*. Rhombus plicatilis ex ære *b b*, binis lateribus ad duplam longitudinem productis. Longitudo laterum pollices $5\frac{1}{4}$, latitudo paulo major pollice dimidio; crassitudo parte ejus decima. Hunc rhombum transversarii medio applicitum tenet cochlea ferrea *f*, supposita æris vel ferri particulâ *g*, ac præterea orbiculo ex ære tenui, leniter convexo, cujus pressu lentus æquabilisque efficitur motus rhombi ac diductio. Porro ex angulo ejus superiore, axis seu columella prominet *c*, perpendiculariter insistens, longitudine sesqui pollicis. Cujus capite altero lamella mobilis adhæret, 4. pollices longa, dimidium lata; quæ hic conspici nequit, quippe tecta capulo ligneo *d*, paris longitudinis, cui conserta est. Huic demum capulo, plano ac parte anteriori leviter inciso, inseritur lamella altera ænea *e*, quæ super axiculo mobili bacillum sustinet, cum affixa oculari lente, tubulo suo inclusa. Ut autem rhombus cum imposito onere æqualiter libretur super axe *f*, adjiciuntur in productis lateribus extremis pondera paria *h h*, quantis ad hoc opus est.

TAB. XXXI. Fig. 2.

Quibus ita se habentibus, quocumque perducta fuerit observantis manu lens ocularis, capulo *d* semper deorsum converso, ibi sponte sua consistit; atque ita, invento sidere, facile imperitior spectator in prioris locum succedit, eodemque fruitur spectaculo. Facit enim funiculus utramque lentem conjungens, ut positum suum fulcrum servet, spectatorem versus reclinans, etsi duobus tantum pedibus insistat; simulque fulcri pondere, eorumque quæ ipsi imposita docuimus, idem funiculus intenditur; adeo ut nihil aptius commodiusve hac in re optari queat.

Altitudo fulcri est pedum 4. poll. 9. Gravitas ejus librarum $2\frac{1}{2}$. Lentis ocularis, cum tubulo & bacillo, gravitas libra dimidia. Rhombi cum ponderibus *h h*, libræ $2\frac{1}{4}$. Quæ propterea adscribo, ut constructionem nostram, experientia comprobatam, eo facilius cuivis imitari liceat.

Nunc

Nunc vero aliud præterea addemus, quo perfectior evadat hæc nostra observandi ratio. quod licet, omissum, nihil plerumque noceret, curioso tamen syderum inspectori nequaquam est negligendum. Nempe cum Saturni comites illos Cassinianos diligentius requirerem, eosque difficulter adsequerer, præsertim noctibus non admodum obscuris, intellexi in causa esse lucem tenuem quandam, ab aëre ad oculum manantem; non eam quæ per lentem majorem advenit, sed quæ extrinsecus circum latera præterlabitur. Huic importunæ luculæ excludendæ, nonnihil quidem conducere sciebam, si circulum illum papyraceum, quo in luna observanda utebar, etiam hic lenti majori circumponerem. Sed aliud efficacius remedium, circa hæc occupato incidit, priori illi jungendum; ut nempe, perforatæ laminæ opposito, oculi pupilla arctaretur, quæ alioqui per tenebras late patere solet. Cujus simul ac experimentum feci, jam clare tres Saturni Lunulas conspexi; cum amoto exiguo foramine media illa nostra tantum cerneretur. Quia vero, ita reductâ pupillâ, minus facile propositum sydus investigatur, quam cum tota patet, idcirco orbiculum illum perforatum, ac semipollicem latum, brachiolo quodam mobili, ac Græco Λ hærentem simili, cui in figura hac adscriptum est *k*, ita conjunximus tubuli fundo per quem lens ocularis inspicitur, quique latiori foramine pervius est, ut non ante quam hoc foramine sydus inventum fuerit, superinducatur alterum illud angustius.

Credidisset fortasse aliquis hac oculi contractione non parum visum obscurari. cum tamen certum sit, si diameter exigui foraminis, ad diametrum aperturæ lentis majoris eam rationem habeat, quam habent inter se focorum utriusque distantiæ, nihilo obscurius telescopio ejusmodi omnia cerni, quam si apertus ac liber oculus relinquatur. Sed præstat duplicare tantillam hanc latitudinem, vel paulo etiam augere amplius, quo minus difficilis sit rei videndæ inquisitio, nec nimium cito inventa stella elabatur, ob mundi conversionem diurnam. Nobis in telescopio 34 pedes longo, foraminuli dia-

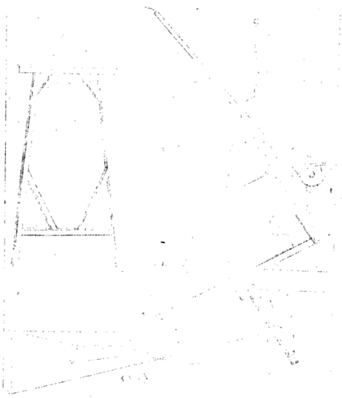
meter decimam sextam circiter pollicis partem habet. Ipsum vero duos pollices cum dimidio ab oculari lente abest, quanta est præcise in hac lente foci distantia. Quod diligenter curandum, quia alias non poterit amplum spatium, ut solet, uno obtutu comprehendi. Facile autem deltoidis brachii flexu, qui quidem in schemate nostro conspici nequit, quantum opus est, lamella perforata removetur, quæ nobis semipollice à tubuli fundo extat.

Porro circulus lenti magnæ circumdatus, telescopii partem longitudinis quadragesimam quintam circiter diametro æquet. Cujus circuli objectu quia paulo impeditiorem reddi necesse erat astri investigationem, visum fuit imponere bacillo, seu caudæ lentis ocularis, stylum *m*, perpendiculariter erectum; cujus apex tantundem supra axem lentium attollitur quantus est circuli illius semidiameter. Hinc enim fit, ut si oculum prius ibi collocemus, unde cum summo margine circuli in eandem rectam lineam stella conveniat; tumque, apprehenso capulo *d*, moveamus lentem ocularem cum adjuncto bacillo, donec in eandem quoque rectam quadret extremum styli *m*; fit inquam ut, ad tubulum ocularem visum referenti, stella eadem per telescopium sese conspiciendam det, vel certe parum absit. Usu vero & exercitatione tum hæc, tum cætera quæ ad hanc observandi rationem pertinent, facilia fiunt.

IV.

Excerpta ex literis D^ni Hugenii de novâ methodo construendi Barometrum.

Quod novam meam methodum Barometri spectat, nosti, diversas aëris atmosphæræ pressiones multo magis fore visibiles, & faciliores distinctu, si in tubo 30 pedes alto fiat barometrum ope aquæ quam sunt in barometris vulgaribus, quæ cum Hydrargyro construuntur. Cum enim maxima diversitas sit circiter duorum pollicum in barometris vulgari-



garibus; in novo hoc barometro erit viginti octo pollicum id est decies & quater major erit, aliæque variationes augebuntur eadem ratione, quæ ipsa datur inter Mercurii & aquæ gravitates specificas.

Sed uti difficile est bene disponere hæc barometra ob magnam tubi altitudinem, quæ impedit etiam, quo minus commodè locari possint, aut de loco in locum transferri. Cogitavi, quo pacto construi posset barometrum mediocris magnitudinis & portatile, cujus effectus quam proxime idem esset ac aliorum illorum magnorum barometrorum, & duas diversas constructiones inveni.

Prima est, ut fiat tubus vitreus A B quatuor pedum cum semisse, qui clausus sit in extremitate A, & cujus cavitas sit circiter duarum linearum; requiritur ut latior sit in loco medio, ubi detur quasi pyxis cylindrica C D, cujus altitudo sit circiter unius pollicis, & Diameter E E 14 vel 15 linearum, id est septies vel octies major diametro tubi; infunditur in apertam extremitatem tantum aquæ, quantum requiritur ad replendum dimidium receptaculi C D cum partis superioris tubi dimidio C F; Porro repletur quidquid superest Mercurio; qui etiam infunditur in vas G ad altitudinem semipollicis, deinde immergitur in hunc extremitas tubi B; tum pro parte exit Mercurius, & qui super est manet ad altitudinem E E; aqua, quæ supernatat, descendit usque in F, relinquens reliquum tubi F A aëre vacuum, & superficies aquæ, adscendendo & descendendo denotat diversum atmosphæræ pondus, gradibus fere æqualibus iis quibus aqua illud denotat in barometro 32 pedum.

TAB. XXXII. Fig. 1.

Altera constructio partim similis est priori, sed multo melior est; detur tubus in medio incurvatus H M N, duæ in hoc tubo requiruntur pixides cylindricæ æquales K & M; quarum una, sc. K, quæ est ad tubi extremitatem, hermetice sit clausa superius, & M, quæ est paululum supra curvaturam, sit utrinque aperta in locis in quibus cum tubo jungitur; longitudo crurum determinata est per distantiam pyxi-

TAB. XXXII. Fig. 2.

dum K, M, quæ ſit circiter 27$\frac{1}{2}$ pollicum *, menſurando diſtantiam inter harum media. Altitudo cujusvis pyxidis eſt præterpropter unius pollicis cum ſemiſſe; diameter interior unius pollicis vel 15 linearum; diameter cavitatis reliqui tubi $\frac{1}{15}$ vel $\frac{1}{11}$ ejusdem magnitudinis. Primo infunditur ſolus Mercurius in tubum per aperturam N, ut fiat barometrum vulgare ex iis, quæ inferius recurvata ſunt. Infundendum vel tollendum eſt Hydrargyrum donec ſuperficies dentur circiter in medio pyxidum K & M, ſi tempore quo fit hæc operatio aër mediæ ſit gravitatis, id eſt in barometris vulgaribus Mercurius ſit ad altitudinem 27$\frac{1}{2}$ pollicum; alioquin enim ſi preſſio aëris ſit major vel minor ordinariâ, ad hoc attendendum, computando pro uno pollice variationis, in vulgari barometro, lineam unam cum ſemiſſe variationis in quavis pyxide: Poſtquam Mercurius bene aëre depurgatus erit, ita ut nullus detur in pyxide K infundetur per aperturam N quidam liquor, qui hieme non congelatur, & qui nequit diſſolvere Mercurium; E. G. aqua communis mixta cum $\frac{1}{2}$ aquæ fortis: ſpiritus vini quidem poſſidet has duas qualitates, ſed non conveniret barometro, quia per calorem dilatatur. Hoc etiam referri debet ad primam formam Barometri.

Quod attinet ad liquoris quantitatem, debet illa adſcendere ad pedem unum circiter in tubum B C poſitâ mediâ aëris preſſione.

Diſpoſito ita hoc Barometro videbimus, maximam differentiam preſſionis aëris, quæ notabitur per ſuperficiem liquoris in tubo M N, fore propemodum 22 pollicum, ſi diametri pyxidum cylindricarum, ſint decies majores diametro tubi. Et ut inveniamus quantum differentiæ quas indicatæ barometrum hoc noſtrum excedant illas, quas poteſt indicare barometrum vulgare, generalis eſt regula, differentias noſtri novi Barometri eſſe ad differentias Barometri vulgaris, ut decies & quater quadratum diametri pyxidum ad idem quadratum plus vicies octies quadratum diametri tubi, qui aquam continet; & hinc ſequitur, cujuſcunque magnitudinis ſint pyxides, maximas differentias non poſſe excedere 28 pollices, quandoquidem differentiæ Barometrorum ordinariorum non excedunt duos pollices. Ut

* *Pollices hi ſunt partes duodecimæ pedis Regii Gallici.*

Ut transferatur commode hoc Barometrum, asseri adjungendum est. vel Thecâ includendum; & notari debent in ligno divisiones æquales ad indicandas altitudinum differentias, quæ augebuntur eadem ratione, in quâ minuetur atmosphæræ pondus.

Sic parvæ mutationes, in pondere atmosphæræ, & quæ non percipiuntur in Barometris ordinariis, in his sensibiles fiunt.

Exempli gratiâ si ferantur in Turrim *de Nostre Dame* vel *Montmartre* videbimus superficiem aquæ descendere in primo Barometro quosdam pollices, & tantum in altero adscendere; si ferantur in domum elevatam tantum 50 pedes, & porro inde descendamus, habebimus notabilem mutationem; propemodum pollicis, ita ut possimus ope hujus instrumenti satis bene mensurare diversam altitudinem montium a se invicem dissitorum, & regionum, quarum situs non sinit, ut has metiamur aliter. Si mutationes temporum ope Barometrorum, prævideri possint uti sperandum videtur, certum est, quod illa, quæ hoc modo constructa sunt, magnam utilitatem habebunt præ aliis, quæ adhibita sunt huc usque.

Verum est quod quædam novorum horum Barometrorum sensibiliter quodammodo mutentur ex calore vel frigore aëris exterioris, quamcunque etiam adhibeamus operam ad illa interiori aëre purganda; sed Barometra ordinaria sunt etiam eidem varietati obnoxia, & si in nostris magis conspicua sit, hoc inde venit, quod multo majores differentias indicent, quam Barometra vulgaria: sed ut occurramus huic malo, quod plane nobis impedimento esset, si vellemus metiri altitudines, possumus Thermoscopium includere in parte Barometri aëre vacuâ, & efficere calefaciendo aërem, qui utrumque cingit, ut Thermometrum redeat ad eandem notam in utraque operatione; & hac viâ certi erimus, quod aër externus nullam inducat mutationem Barometro, & quod omnis varietas, quæ ibi apparebit, oriatur ex diversâ atmosphæræ gravitate.

Dixi posteriorem constructionem alterâ meliorem esse, non

solum, quia ultimum Barometrum multo minoris voluminis est, sed &, quia observavi, quod in priori parum aëris, quem aqua exhalat in vacuo, pedetentim augeatur temporis diuturnitate; cui vitio certum est Barometrum 32 pedum, de quo supra dixi, pariter obnoxium esse; Et, ut huic malo occurratur, quærendus est liquor, qui non producit aërem, ut faciunt aqua & spiritus vini. Sed patet, quod posterius nostrum Barometrum hoc vitio non laboret, quoniam aqua in vacuo non est inclusa: Quod si percipiamus aquam, quæ est in posteriore Barometro, vapores emittere, tantum superius infundenda est gutta olei, quod frigore non inspissatur, quodque calore non emittit vapores, ut oleum amygdali dulcis.

V.

Nova vis movens mediante pulvere nitrato & aëre.

Desideratum a longo tempore est artificium quo vis pulveris pyrii aliis, quam quibus huc usque inserviit, usibus applicari posset, in quibus omnibus vis admodum subita requiritur, qualem observamus in explosione bombardæ & sclopeti & disruptione cuniculorum: si impetus ille promtus posset moderari & reduci ad vim magis placidam, maximam in mechanicis utilitatem haberet, & in multis occasionibus, in quibus vim hominum, equorum, venti, aliarumque potentiarum adhibemus, inserviret. Ad hunc effectum excogitavi machinam, hic delineatam. Hanc non propono, acsi in omnibus partibus perfecta foret, sed tanquam inventum, quod cum pro parte successit, poterit ad majorem proferri perfectionem.

TAB. XXXII. Fig. 1. A A cylindrus cavus est, intus bene politus, & ubique æqualis magnitudinis; B est embolus in superiori parte Cylindri, & qui in hoc potest moveri; in C C cylindrus est perforatus duobus foraminibus, quorum diametri circiter sunt $\frac{1}{4}$ diametri cylindri; tubi D, D, corii madidi & mollis, firmiter

miter alligati sunt duobus cylindris minoribus, qui cum majori cohærent, & circumdant foramina; tubus unus exhibetur pendens, alter extensus. In fundo cylindri cum hoc conjungitur ope cochleæ interposito annulo coriaceo pyxis H; ita ut exacte claudat apperturam cylindri; E E sunt retinacula, quæ cylindrum in inferiori parte conjungunt cum theca, qua includitur, sed quæ hic non est exhibita, ne turbetur figura: E F est funis annexus embolo B, circumponitur trochlea G, & inservit ad movendum id, quod ei applicatur.

Obtecto parvâ aquæ quantitate embolo, qui superius firmiter debet consistere, ne possit exire ex cylindro, immittitur in cistam H parum pulveris tormentarii cum parva quantitate igniarii Germanici accensi, & clauditur bene cista mediante sua cochleâ.

Pulvis ille paulo post accensus implet cylindrum flammâ & fugat aërem per tubos coriaceos C D, C D, qui extenduntur, quique statim clauduntur iterum ab aëre exteriore; ita ut cylindrus maneat aëre vacuus, saltem maximâ parte; porro embolus B est adactus per pressionem aëris, qui supra gravitat ad descendendum, & sic trahit funem F F pariter illud quod ei appenditur.

Quantitas ejus pressionis cognita est, & determinata, per gravitatem aëris, & per magnitudinem diametri emboli, qui, si sit unius pedis, ita premitur, ut sustineat pondus 1800 circiter librarum; posito, quod cylindrus totus fiat aëre vacuus, quod huc usque efficere non potui; etiam experimenta eo respectu in magnis & parvis cylindris non eodem modo processere.

Cylindrus diametri $2\frac{1}{2}$ pollicum, & 20 poll. longus, pondere 6 granorum pulveris aëre, evacuatus fuit $\frac{3}{4}$ partibus; in cylindro ejusdem latitudinis, sed longitudinis 44 poll., requiruntur 36 grana pulveris ut ejiciantur $\frac{3}{4}$ aëris; Et in cylindro diametri unius pedis, & $3\frac{1}{2}$ altitudinis, $1\frac{1}{2}$ drachma pulveris ad fugandum $\frac{1}{2}$ aëris; & duplicata pulveris quantitate vix magis evacuatus fuit cylindrus.

Aër

Aër vero ille qui supereſt in cylindro, impedit magnam partem effectus, quem exereret machina, ſi omnis aër prorſus exhauriretur; ut ſatis videre eſt, & ſimul determinari computatione poteſt. Ideo deberet examinari, quæ ratio inter altitudinem & diametrum cylindri ſit optima in hàc machina ad hanc maxime evacuandam adhibitâ minima quantum poſſet pulveris quantitate, nam licet totus cylindrus non evacuetur, vis hujus preſſionis nihilominus magnum ederet effectum.

Poterit hæc inſervire non tantum elevationi magnorum ponderum quorumcunque & aquarum. Sed etiam ad projicienda globos & ſagittas magna vi, juxta methodum baliſtarum veterum.

Ulterius, cum propter cylindri convexitatem, non ſit neceſſe, ut ſit valde ſolidus ad reſiſtendum preſſioni aëris externi, certum eſt totam machinam exigui ponderis eſſe poſſe, quæ levitas conjuncta cum magna vi, quam habet, poterit forte uſui eſſe ad effectus edendos quos huc uſque impoſſibiles duximus.

VI.

Demonſtratio Æquilibrii bilancis.

TAB. XXXII. Fig. 4.

In demonſtratione, quam Archimedes dedit de propoſitione fundamentali Mechanices, tacite ponit quid, de quo jure aliquo poſſumus dubitare; eſt autem hoc, ſi plura pondera æqualia annexa ſint libræ ad diſtantias æquales a ſe invicem; ſive omnia ſint ad eandem partem puncti ſuſpenſionis, ſive quædam transferantur ad patrem oppoſitam, ut in hac figura, ubi punctum ſuſpenſionis eſt A, pondera habere eandem vim ad deflectendam libram quam ſi forent omnia ſuſpenſa in puncto, ubi eſt commune eorum centrum gravitatis, ut hic eſt punctum B. adeo ut ſi ſeparatim ſuſpenſa in æquilibrio forent cum contrario pondere C, hoc etiam obtineret ſuſpenſis omnibus ponderibus in puncto B, vel eorum loco pondus D, quod æquat omnium gravitatem.

Qui-

Quidam Geometræ parumper mutando hanc demonstrationem tentarunt defectum minus sensibilem reddere, sed in totum fuisse sublatum mihi non videtur. Igitur conatus sum alio modo eandem propositionem demonstrare uti sequitur.

1°. Postulatur cum Archimede, duo pondera æqualia appensa extremitatibus brachiorum æqualium libræ fore in æquilibrio.

2°. Positis ponderibus æqualibus, & brachiis libræ, cui appensa sunt, inæqualibus, illam inclinari ad latus brachii longioris.

3°. Postulatur posse concipi, lineas & plana, de quibus loquimur in hac demonstratione, inflexilia & sine gravitate esse.

PROP. I. *Si super planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem versus ad quam applicatur erit major, quam si positum sit prope dictam lineam.*

Sit planum Horizontale A B impositum lineæ rectæ C D, & cui applicetur pondus E, cujus distantia a C D lineâ perpendiculari E H mensuratur; & cui porro applicetur idem pondus in F, ita ut distantia F H minor sit quam E H, dico, quod habebit plus virium ad planum deflectendum, si sit applicatum in E quam in F. TAB. XXXII. Fig. 5.

Nam producta recta E F H in G & positis H G & H F æqualibus, certum est, pondus æquale illi, de quo locuti sumus, applicatum in G in æquilibrio futurum cum altero in F, propter æqualia brachia F H, H G.

Sed pondus translatum ex F in E deflectet planum, quoniam plano existente sine gravitate effectus idem est ac in bilance brachiorum inæqualium quæ æqualibus ponderibus gravantur, idem ergo pondus positum in E plus virium habet ad planum deflectendum quam si est in F; Q. E. D.

PROP. II. *Si planum Horizontale, oneratum plurimis ponderibus, maneat in æqualibrio, impositum lineæ rectæ, quæ* id

id secat in duas partes, centrum gravitatis plani sic onerati erit in ipsa linea recta.

TAB. XXXII. Fig. 6. Sit planum Horizontale A B oneratum ponderibus C C, D D & quod manet in æquilibrio, impositum rectæ E F; dico centrum ejus gravitatis esse in illa linea E F; nam posito, si fieri potest, centrum gravitatis esse alibi in puncto G, ducatur per id punctum recta H K parallela ipsi E F.

Tunc ergo, quia planum fultum in puncto G, manet in suo situ Horizontali, debent, ducta linea recta quacunque in plano per punctum G, pondera ad utramque partem lineæ esse in æquilibrio.

Idcirco pondera C C facient æquilibrium cum ponderibus D D, quando planum fulcitur a recta H K: id quod fieri nequit, quoniam manet in æquilibrio fultum a recta E F; nam patet, omnes distantias ponderum ad unam partem esse diminutas, scilicet ponderum C C, & consequenter etiam effectus gravitatis eorum; & distantias ponderum oppositorum D D esse auctas, & eodem tempore effectum eorum gravitatis, adeo ut ultima pondera deflexura sint planum ad suam partem, & multo magis si unum vel plura pondera C C sint ad alteram partem lineæ H K; Centrum ergo gravitatis plani onerati erit in linea E F. Q. E. D.

PROP. III. *Duo gravia commensurabilia appensa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, si brachia sint in ratione reciproca gravium.*

TAB. XXXII. Fig. 7. Sint gravia commensurabilia A & B, quorum A sit majus; & libra C D E, cujus brachium D E sit ad D C, ut grave A ad grave B; dico, libram esse in æquilibrio appenso A ad extremum C, & B ad extremum E, si C E sustineatur in D.

Concipiatur planum parallelum ad horizontem transiens per lineam C E, in eo plano sint ductæ per puncta E & C rectæ L E G, K C M perpendiculares ad C E; fiat ulterius E F æquale C D, & ducantur G F K, M D L quæ cum C E angulos semirectos efficiunt & sese mutuò ad angulos rectos secant in N; illæ lineæ necessario occurrunt duabus prioribus, quas duximus per E & C; ponamus puncta

cta occursus esse G, K & M, L; manifestum est, E G æquale esse E F, & C K, C F, uti etiam G K, M L, se mutuo secare in medio in puncto N; & triangula G N L, K N M esse similia & æqualia: sumatur E H æquale E G, & C O æquale C K; tum, quia E D est ad D C ut pondus A ad B, patet quod lineæ E D & D C, sint commensurabiles, ut & H G & K O, cum inter se sint ut E F ad F C, id est ut C D ad D E. Sint ergo K O & H G divisæ in partes æquales per maximam earum communem mensuram, & quantitates A & B pariter divisæ; idcirco habebuntur tot partes ponderis A, quot habentur partes in linea K O, & tot partes ponderis B, quot habentur partes in linea H G, quæ partes ponderum, æquales inter se, sint singulæ appensæ in medio unius ex partibus linearum K O, H G.

Jam demonstrabimus, quod gravibus ita dispositis, planum maneat in æquilibrio, quando fulcitur a puncto D, unde veritas propositionis erit manifesta; quoniam concipere possumus omnes partes plani esse sublatas & solas lineas K O, H G, oneratas ponderibus æqualibus ipsis A & B, sustineri in extremitatibus libræ C & E, nam cum planum sit sine gravitate, partes sublatæ non possunt mutare æquilibrium.

Ad demonstrandum igitur, æquilibrium plani, ut dictum est gravati, dari in puncto D, sint ductæ ex quovis pondere perpendiculares ad lineam L M, quantum necesse est, productam, uti R S, Z I, T V, X Y. Perpendiculares T V & R S, quæ ducuntur a ponderibus maxime vicinis punctis G & K erunt inter se æquales; nam triangula G N L, K N M sunt æqualia & similia, uti dictum est, & latera G L & K M sunt etiam æqualia inter se, ut & intervalla G T & K R, quæ singula æqualia sunt dimidio unius ex partibus æqualibus in quas divisæ sunt lineæ H G, K O; unde patet lineas T V, R S, etiam fore æquales, uti dictum est; Tunc si fulciatur planum in linea L M Q, pondus T in æquilibrio erit cum pondere R.

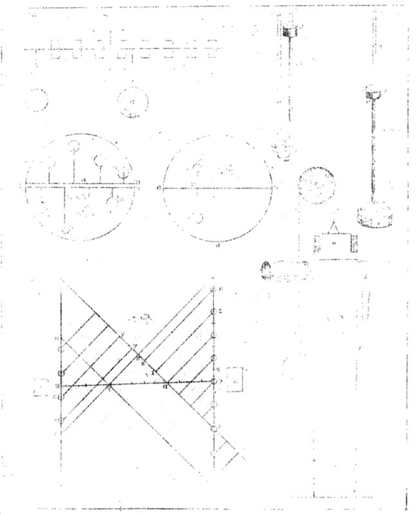
Pariter, ob æqualitatem perpendicularium X Y & Z I, pondus X erit in æquilibrio cum pondere Z, & sic con-

sequenter omnia pondera lineæ G H cum tot ponderibus sumtis post K in linea K O; id est, si sumatur pars K P æqualis lineæ G H, pondera appensa inter K & P, æquiponderabunt cum omnibus ponderibus lineæ G H.

Si ergo pondera reliqua in linea P O etiam faciant æquilibrium unum cum altero in plano fulto a linea L M Q, sequetur planum oneratum omnibus ponderibus mansurum in æquilibrio super eandam illam lineam.

Æquilibrium autem ponderum reliquorum ita invenitur: cum sit K O = 2 C F; & K P = H G, id est 2 C D, erit P O = 2 D F; sed M O = D F; quoniam C M = C D; ergo M P est dimidium P O; Adeo ut linea P O, quæ continet numerum partium, quibus K O superat H G, in 2 partes æquales dividatur per rectam L M Q, manifestum ergo est æqualem numerum ponderum illorum quæ continet illa linea P O dari ad partem utramque puncti M, & similiter disponi; ideo si numerus illorum ponderum sit impar, illud quod in medio est, erit in puncto M, unde sequitur, singulas perpendiculares quas duximus ab iisdem ponderibus ad lineam L M Q æquales esse sibi respondentibus, & consequenter pondera esse in æquilibrio, quando planum fulcitur a linea L M Q; quod cum ita sit demonstratum de aliis ponderibus linearum P K & H G, sequitur planum cum omnibus ponderibus mansurum in æquilibrio fultum a linea L M Q; Centrum ergo gravitatis plani sic onerati est in illa linea; sed centrum gravitatis etiam est in linea C E, quoniam evidens est planum etiam futurum in æquilibrio si in hac linea sustineatur, Erit ergo centrum gravitatis punctum commune illis duabus lineis L M Q & C E, scilicet punctum D in quo si planum sustineatur manet in æquilibrio. patet ergo, veritas Theorematis.

VII.



VII.

De potentiis fila funesve trahentibus.

PROP. I. *Si punctum A trahatur a filis duobus A B, A C angulum B A C facientibus, sintque potentiæ trahentes ut filorum ipsorum A B, A C, longitudines multiplices secundum numeros datos N & O; juncta vero B C dividatur in E, ut sit reciprocè C E ad E B sicut numerus N ad O, & jungatur A E: dico filis A B, A C ita trahentibus, æquipollere filum A E tractum à potentia quæ sit ut longitudo A E multiplex secundum numerum æqualem utrisque N & O.* TAB. XXXIII. Fig. 1.

Producantur enim A B, A C ad F & G, ut sit A F multiplex A B secundùm numerum N, & A G multiplex A C secundùm numerum O; junctæque F G occurrat A E producta in H, & sint B K, C L parallelæ A H.

Quia ergo F H ad H K ut F A ad A B, hoc est, ut numerus N ad unitatem; H K vero ad H L ut B E ad E C, hoc est, ut numerus O ad numerum N: erit, in proportione turbata F H ad H L, ut numerus O ad unitatem, hoc est ut G A ad A C, sive ut G H ad H L. Itaque F H ad H L ut G H ad H L, ac proinde F H æqualis H G.

Sit jam A H continuata usque in P, ut sint æquales A H, H P, & jungantur G P, F P: eritque F A G P parallelogrammum, ad cujus diametrum P A ducantur F Q, G R, parallelæ B C. Manifestum igitur est fieri triangula similia & æqualia F P Q, G A R, quorum latera inter se æqualia P Q, R A. Est autem A E ad A R ut A C ad A G, hoc est, ut unitas ad numerum O. Eadem verò A E ad A Q ut A B ad A F, hoc est, ut unitas ad numerum N. Ergo erit A E ad utramque simul A Q, A R, sive A Q, Q P, hoc est, ad A P, ut unitas ad utrumque simul numerum N & O.

Cùm ergo potentiæ fila A B, A C trahentes, sint ut A F, A G, quibus æquipollet attractio per filum A E à potentia quæ sit ut A P, ex theoremate Mechanico satis noto, manifesta est propositi veritas.

PROP. II. *Datis positione quotlibet punctis; sive in eodem plano fuerint, sive non: si à puncto quod eorum commune est gravitatis centrum, ad unum quodque datorum fila extendantur, eaque singula trahantur à potentiis quæ sint inter se ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.*

TAB. XXXIII. Fig. 1. Sint data puncta A, B, C, D, E, quæ vel in eodem plano vel aliter utcunque collocata intelligantur: attributâ autem singulis æquali gravitate, constat commune eorum gravitatis centrum inveniri hoc modo.

Jungantur nempe duo quælibet datorum punctorum rectâ A B, quâ bifariam sectâ in F, erit hoc centrum gravitatis punctorum A, B. Ducatur deinde ad punctum aliud C recta F C quæ secetur in G, ut sit C G dupla G F; & erit G centrum gravitatis punctorum trium A, B, C. Rursus ducatur ad aliud punctum recta G D, seceturque in H, ut sit D H tripla H G, & fiet H centrum gravitatis punctorum quatuor A, B, C, D.

Similiterque ductâ H E ad punctum quintum E, sectâque in K, ut K E sit quadrupla K H, erit K centrum gravitatis punctorum quinque A, B, C, D, E. Ac simili ratione quotcunque punctorum centrum gravitatis invenire licebit.

Porro extentis filis à puncto K ad A, B, C, D, E, quæ trahantur singula à potentiis quæ sint inter se ut ipsæ longitudines K A, K B, K C, K D, K E: dico fieri æquilibrium manente nodo communi in K. Ducantur enim à centris gravitatis inventis F, G, H, ad centrum gravitatis omnium punctorum K, rectæ F K, G K, H K. Itaque constat filis A K, B K, punctum K trahentibus cum potentiis quæ sint ut longitudines eorum filorum, æquipollere filum F K, tractum à potentia quæ sit ut dupla longitudo F K. Rursus verò duobus his, filo F K trahenti cum potentia quæ sit ut dupla F K, & filo C K trahenti cum potentia quæ sit ut simplex longitudo C K, æquipollet filum G K tractum à potentia quæ sit ut tripla K G per præcedentem: ergo filum G K ita tractum æquipollet filis tribus K A, K B, K G,

K C. Similiter verò duobus his, filo G K tracto à potentia quæ sit ut tripla G K, & filo D K tracto à potentia quæ sit ut simplex longitudo D K, æquipollet filum H K tractum à potentia quæ sit ut quadrupla H K. Ergo hoc æquipollet filis omnibus K A, K B, K C, K D, punctum K uti dictum est trahentibus. Atqui filo K H in directum opponitur filum K E tractum à potentia quæ est ut longitudo K E, id est ut quadrupla K H. Ergo cum filis K E, K H, in partes directè oppositas trahentibus cum potentiis æqualibus, punctum K necessario in locum suum servatum sit, sequitur & filis K A, K B, K C, K D, uti dictum est trahentibus & ex alia parte filo K E nodum restare immotum. Quod erat demonstrandum.

Possunt autem & binorum quorumque punctorum centra gravitatis primò designari, & per hæc deinceps centra gravitatis quaternorum, & per hæc octonorum & sic porro; qua ratione simplicior plerumque efficitur demonstratio, ac præsertim si datorum punctorum numerus fuerit pariter par.

Ut si quatuor data fuerint A, B, C, D; sive in eodem plano, sive non: junctis A B, C D, divisisque bifariam in E & F; ductâque inde F E, quæ rursus bifariam secetur in G; constat G esse centrum gravitatis punctorum A, B, C, D. Quod si jam nodus G trahatur filis G A, G B, G C, G D, à potentiis quæ sint inter se ut hæ ipsæ filorum longitudines; dico fieri æquilibrium. TAB. XXXIII. Fig. 1.

Constat enim filis G A, G B, æquipollere filum G E tractum à potentia quæ sit ut dupla G E; filis verò G C, G D, æquipollere filum G F tractum à potentia quæ sit ut dupla G F. Cum ergo G E, G F æquales sint, unamque lineam rectam efficiant, eodem modo nodus G trahitur, ac si traheretur à potentiis æqualibus per fila G E, G F. Unde immotum manere necesse est.

Constat verò si puncta A, B, C, D non sint in eodem plano, fore G centrum gravitatis pyramidis cujus anguli hæc ipsa quatuor puncta; cum in omni pyramide idem sit centrum

trum gravitatis ipſius ſolidi & quatuor punctorum angularium, uti oſtendere facillimum eſt. Et hinc patet veritas theorematis Robervalliani, *Si à centro gravitatis pyramidis fila tendantur ad quatuor angulos, quæ trahantur à potentiis quæ ſint inter ſe ut filorum ipſorum longitudines, fieri æquilibrium manente nodo in dicto gravitatis centro.*

VIII.

Solitio problematis a G G. Leibnitio propoſiti in diario (cui titulus Nouvelles de la Republique des Lettres) *menſis Sept.* 1687.

PROBLEMA.

Detegere lineam juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat.

SOLUTIO.

Impoſſibile eſt problema ſi requiratur ut corpus motum in tali linea inchoet a quiete.

TAB. XXIII. Fig. 4.

Sed ſi ponamus corpus quandam, quantumvis exiguam, velocitatem habere ex. gr. quam acquirit cadendo ab altitudine A B, quæſito ſatisfacit curva B C, cujus hæc eſt proprietas ut cubus altitudinis B D æqualis ſit quadrato perpendicularis C D ad A B continuatam ducto in $\frac{9}{4}$ A B.

Præter curvam hanc B C, in numeræ aliæ dantur ejuſdem generis, & quæ facile deteguntur, in quibus corpus etiam, temporibus æqualibus, æqualiter, ſed lentius quam per B C, ad Tellurem accedit.

Si B D ſit dupla ipſius B A, tempus deſcenſus per curvæ partem B C aquale erit tempori caſus per A B.

H. D. Z.

IX.

IX.

Christiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile se pondere proprio curvat.

Si Catena C V A suspensa sit ex filis F C, E A utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque Angulus inclinationis filorum productorum C G A, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis V B. TAB. XXXIII. Fig. 5.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata L H dividat æqualiter axem B V. Jam si angulus C G A sit 60°, erit inclinanda a puncto A ad axem recta A W, æqualis $\frac{1}{2}$ A B, cui ducta parallela L R, tanget curvam in puncto L. Item si latera G B, B A, A G sint partium 3, 4, 5, erit A W ponenda partium 4½.

2. Invenitur porrò & recta linea catenæ æqualis, vel datæ cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo C G A, data erit ratio axis B V ad curvam V A. Velut si latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit curva V A tripla axis V B.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc est, semidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc descriptus totus intra curvam cadat. Nam si angulus C G A sit 60°, erit radius curvitatis ipsi axi B V æqualis. Sin vero angulus C G A sit rectus, erit radius curvitatis æqualis curvæ V A.

4. Poterit & circulus æqualis inveniri superficiei conoidis, ex revolutione catenæ circa axem suum. Ita si angulus C G A sit 60°, erit superficies conoidis ex catena C V A genita æqualis circulo, cujus radius possit duplum rectangulum B V G.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvæ K N, cujus evolutione, una cum recta K V, radio curvitatis in verti-

ce, curva V A describitur; atque evolutæ ipsius K N longitudo. Velut si angulus C G A fuerit 60°, erit K N tripla axis B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit illa [illegible] axis B V.

6. Præterea spatii N K V A N quadratura datur. Posito enim angulo C G A 60°, erit spatium illud æquale rectangulo ex axe B V, & ea quæ potest triplum quadratum ejusdem B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit idem spatium æquale septuplo quadrato B V, cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenæ inveniri possunt, posita quadratura curvæ alterutrius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, vel $xxyy = 4a^4 - x^4$. Vel etiam data distantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abscindunt rectæ axi parallelæ in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvæ pendet a summis secantium arcuum per minima æqualiter crescentium: quæ summæ ex Tabulis sinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod si angulus C G A sit rectus, & ponatur axis B V partium 10000; erit B A, 21279, non una minus. Curva autem V A, per superius indicata cognoscitur hic esse partium 24142, non una minus.

In his omnibus non nisi ad casus singulares solutiones problematum dedi, vitandæ prolixitatis studio & quoniam non dubito quin regulas universales Viri docti affatim sint exhibituri. Quod si tamen aliquæ ex nostris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud Clarissimum Virum *G. G. Leibnitium* involucro quodam obtectas deposui.

X.

Hugenii Annotationes in librum Parisiis 1689. editum, de Manuaria Nautica.

Auctor hujus libri est D. Renaldus (*M. Renau, Ingenieur general de Marine*), summa cura & methodo conscriptus est, &

& auctoris peritia in Geometricis, & analysi in hoc patet; nulla ponuntur principia, quæ vera non fatear, & integra si Theoria inde legitime deducta foret, nihil in opere culpandum esset; hoc tamen deficiente, utile credidi de notabili quem notavi errorem, monere, cum enim spectet ad maximam partem regularum, quæ in hoc libro Nautis præscribuntur posset hos in maximos, & periculosos admodum errores inducere.

Initium faciam memorando quæ in Art. 1. cap. 2. continentur, in quo Auctor navem H B M ponit, in qua linea recta D C Veli positionem repræsentat, quod tanquam plana superficies concipitur, perpendiculariter super istam lineam elevatam; A B est directio venti qui velum propellit; B G est perpendicularis ad D C; G K est perpendicularis ad B K, carinam navis productam; G E A est arcus circuli centro B descripti; B K G est circuli peripheria cujus Diameter est B G. TAB. XXXIII. Fig. 6.

Verissimum est quod Auctor notat, superficiem C D a vento A B propelli juxta lineam B G, ita ut navis per B G ad punctum G tenderet, si nullibi magis quam ad proram aqua resisteret. Addit, navem istam lineam percurrendo directe progredi per B K, & ad latus per K G; sed cum navis majori difficultate aquam lateribus, quam prora secet, non poterit juxta directionem K G per integram hanc lineam progredi, sed deerit pars, quæ sequetur rationem excessus quo difficultas secandi aquam ad latus superat difficultatem qua navis hanc prorâ secat; ex. gr. si difficultas secandi aquam ad latus se habeat ad difficultatem qua prora illam secat ut decem ad unum, si fiat K G ad K L ut 10 ad 1, & ducatur B L, dicit Auctor navem moveri per B L, hancque lineam percurrere eo tempore quo potuisset in G pervenire, si resistentia ab omni parte fuisset æqualis.

Auctorem huc usque nos fuisse secutos sufficiat. Contendo ipsius errorem in eo dari, quod dicat navem pervenire ex B in L *eodem tempore*, quo pervenisset ex B in G. Nam si deviatio nullam esse ponamus, ut ambages removeantur, certissimum est navem, juxta Auctorem, progredi

ex B in K, eodem tempore, quo pergeret ex B in G, si undequaque aquam eadem facilitate secaret, aut directe per B G, æque ac per B K progrederetur.

In his sic ratiocinatum fuisse auctorem videtur, scilicet, si in motu ex B in G, navis feratur ad latus per K G & directe progrediatur per B K, oportet, ut sublato motu per K G, motus per B K supersit, quo motu linea B K percurrebatur eodem tempore quo B G.

Sed notandum erat, licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K, & K G, inde non sequi si in re ipsa tantum supersit motus per B K (sive figura ipsius navis in causa sit, sive hæc cohæreat cum fune infinito B R, perpendiculari ad B M) ventum, qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse transferre ex B in K. Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.

Constat autem in Mechanicis, vim, qua velum D C, navem pellit per B K, esse ad vim qua idem velum, & in eadem positione respectu venti, illam pelleret per B G, uti B K ad B G: ut Auctor ipse ponit in his, quæ scripsit de impressionibus aquæ in gubernaculum Art. 5. hujus secundi Cap. Sed celeritates quoque essent sicuti B K ad B G; quia ponit Auctor lineas æqualibus temporibus percurri. Vires ergo forent ut celeritates, quod impossibile est, dictisque Auctoris repugnat in 13° Art. primi Cap. ubi dicit, *ut corpus diversis velocitatibus in fluido moveatur, requiri vires in ratione quadratorum celeritatum*: lineæ ergo B K, B G, non percurruntur æquali tempore. Ut autem determinetur, spatium juxta B K percursum continuanda est B K in S, ita ut B S sit media proportionalis inter B K, B G. Tum B S erit spatium, quod eo tempore permeabit navis quo pergeret per B G; si aquam juxta hanc directionem eadem facilitate secaret. nam quadrata celeritatum per B G,

B G, & B S, & conſequenter etiam aquæ reſiſtentiæ ſunt inter ſe ut B G ad B K; aſt, uti modo oſtendi, virium ratio eſt etiam ut B G ad B K; vires igitur ſunt ut reſiſtentiæ, & etiam ut quadrata velocitatum. Hæ ergo ſunt velocitates, quæ ſunt ut B G ad B S, quas Navis in ambobus motibus acquirere debet ſecundum ipſam Auctoris ſtatim memoratam, nec in dubium revocandam, regulam. Non ergo ut credidit Auctor circumferentia circuli B K G determinat ſpatia a navi permeanda in diverſis carinæ poſitionibus, manente eadem veli C D poſitione reſpectu directionis venti, ſed determinantur hæc ſpatia curvâ B I S G T, cujus puncta eodem modo ac S, facile inveniuntur. Hic autem notandum eſt, ſpatia quæ hac curvâ deteguntur, eo magis ab iis differre, quæ Auctor adhibitâ circumferentiâ B K G determinat, quo angulus quem carina cum venti directione efficit acutior eſt; ita juxta B N navis progredictur per B I, quæ dupla eſt ipſius B N circulo inſcriptæ, ſi B N ſit $\frac{1}{2}$ B G; & tripla ſi B N ſit $\frac{1}{3}$ B G.

Error a me notatus in toto fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur Theoremata quæ de cætero elegantia videntur. Quale eſt inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, carinæ ſitum, quo in adverſum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati; unde Auctor deducit, ponendo quod deviatio nulla ſit, carinæ & veli ſitum in hoc caſu omnium maxime utilem dari, quando angulus quem carina cum vento efficit eſt 60 gr., & angulus venti cum velo 30 gr., quod a vero abeſt; nam per Regulam, quam veram novi detego, quando venti & carinæ angulus eſt graduum 60, navem celerius moveri, ideoque in adverſum venti magis progredi, ſi angulus veli & venti 38 gr. 23′. fiat, quam ſi angulus hicce foret 30 graduum. Regula qua detego veli ſitum, ut navis omnium celerrime moveatur, ubi carinæ cum vento angulus datus eſt, talis eſt $x^4 = aaxx + \frac{1}{3}ppxx - \frac{1}{4}aapp$. ſcilicet, ſi x deſignat ſinum O Q anguli veli cum vento, a radius B A, p ſinus F P anguli carinæ cum vento. Et congruit hæc regula cum illa quam

D. Fatio antea invenit, cum aliis pulcherrimis circa hanc materiam, ut percepi in tabula quadam, in qua quorundam istorum angulorum rationes designarat. Duas veras radices continet æquatio hæc inservientes duobus casibus, in quibus carina cum venti linea eundem angulum efficit, utpote, quando navis vento secundo aut adverso utitur.

Cæterum quin vera sit nostra regula non poterit, D. Renaldus dubitare, cum per eam angulus gubernaculi cum carina, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem determinavit in capite 7°. Quod ipsius inventum certe utilissimum est. Ponendo enim $p = a$, id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regulâ habetur $x = \sqrt{\frac{1}{2} aa}$, quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.

Licet Theoria hæc post a me indicatam correctionem difficilior evadat, quam in tractatu D^ni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi posse, qua & navis & veli situs determinarentur, ut in adversum venti omnium maxime progrediatur, sed computatio nimium longa foret, quare hanc nunc non aggredior. Quibus addendum navis deviationem in hac computatione non considerari, ex qua consideratione maxima daretur difficultas. Quia non modo cum auctore attendendum est ad relationem inter resistentias quas patitur navis proram versus & ad latus, sed etiam ad actionem venti in ipsam navem, præcipue in hujus latus; ita ut ex unica observatione quæ ad deviationem spectant non possent deduci.

X I.

Responsum D^ni Renaldi ad Dominum Hugenium.

D^nus Hugenius hæc ponit, *licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K & K G, inde non sequi, si re ipsa tantum supersit motus per B K, ventum, qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse* trans.

transferre ex B in K. Et primo in eo mihi videtur falli. Nam ut navis possit ferri ex B in G tempore determinato, necesse est ut reapse celeritatem habeat, quâ eodem tempore secundum determinationem B K, lineam B K, & secundum determinationem K G, lineam K G possit percurrere. Et ne hoc in dubium vocari possit, concipiamus navim pelli secundum determinationem B K, vi quâ certo tempore ex B possit pervenire in K; concipiamus eandem simul pelli secundum K G, vi quâ eodem tempore possit percurrere lineam K G: cum duæ hæ vires nec sibi contrarientur nec etiam concurrant (est enim B K perpendicularis ipsi K G) necesse est ut harum unicuique navis ex toto obsecundet; & per consequens celeritas, quam singulis momentis habebit secundum B K, erit ad celeritatem, quam iisdem momentis habebit, secundum K G, ut B K ad K G; & ita navis utrique vi satisfaciens, movebitur per B G, & tempore determinato perveniet in G; Et ideo si in effectu ipsi relinquatur solus motus per B K, vis quæcunque, quâ pelleretur ex B in G, illam tempore æquali pellet ex B in K. Inutilem enim reddendo illam impressionis partem, quæ requiritur ut eodem tempore navis percurrat K G, neque augetur, ut diximus, neque minuitur celeritas per B K. Fateor, si angulus B K G esset acutus, vim peculiarem quâ pelleretur navis secundum K G, aliquid detracturam celeritati, quam haberet secundum B K utpote sibi contrariæ; & contra, si angulus B K G foret obtusus, eandem celeritatem utpote cum altera concurrentem, esse augendam; sed cum angulus B K G rectus sit, vis illa celeritatem navis secundum B K neque auget, neque minuit.

Addit D^nus^ Hugenius; *Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.* Statim ostendi relationes celeritatum in variis determinationibus sibi invicem perpendicularibus, sufficere ad detegendam viam, quam navis est secutura; nec per consequens ad id requiri relationem virium, nec resistentiarum; sed cum dictæ celeritates à viribus dependeant, idem ex

rela-

relatione virium facile probabo.

Demonstravi Articulo 13° Cap. 1. Theoriæ manuariæ nauticæ, de quo Articulo Dnus Hugenius mecum consentit, vires navem propellentes esse inter se ut quadrata velocitatum; & propterea vis requisita, ut navis certo tempore secundum determinationem B K conficiat B K, est ad vim, quâ secundum determinationem K G conficiat K G, ut quadratum B K, ad quadratum K G; unde sequitur, navem, si secundum duas illas determinationes simul pelleretur, habituram vim duabus illis viribus æqualem; cum scilicet neutra neutri quicquam vel addat vel detrahit; per consequens vis illa exprimetur per quadratum ipsius B G, quod æquale est quadratis B K & K G; & ita navis habebit celeritatem ex illa vi ortam, id est, dicto tempore quantitatem B G peragrabit. Et propterea, si navis pelleretur secundum B G, vi quæ exprimitur per quadratam B G, perveniret in G eodem tempore, quo perveniret in K, si pelleretur secundum B K, vi quam exprimit quadratum B K.

Pergit Dnus Hugenius hoc modo; *Constat autem in mechanicis, vim, quâ velum D C pellit navem per B K, esse ad vim, quâ idem velum, & in eadem positione respectu venti, navem pelleret per B G, ut B K ad B G.* Non ego fateor id ex regulis Mechanices sequi; è contra certum est, virium illarum relationem inter se esse ut quadratum B K ad quadratum B G, non vero ut B K ad B G; & ut omne hic dubium eximatur, concipiamus aërem secundum lineam A B duplo citius moveri uno tempore quam altero. Quando duplo citius movebitur quadruplo fortius in velum impinget, quoniam unaquæque particula duplo fortius impingit propter velocitatem duplam, propter quam etiam duplo plures particulæ eodem tempore impingunt. Quare si velocitas sit dupla, & massa itidem dupla, vis seu potentia est quadrupla. Si tripla foret velocitas, unaquæque particula triplo fortius impingeret, quia tripla esset velocitas; & simul quia tripla esset velocitas, triplo plures par-

particulæ simul impingerent; unde triplâ existente velocitate, massâ etidem triplâ, potentia aut vis erit noncupla; ex quo patet massam augeri in eadem ratione, qua velocitas augetur; & cum unaquæque pars etiam fortius impingat in ratione auctæ velocitatis, potentia aut vis venti in velum, est in ratione duplicata celeritatum venti, id est, in ratione quadratorum velocitatum venti in velum. Agnoscit hocce principium Cl. Hugenius; restat ergo tantum, ut illud applicemus.

Prima applicatio ostendet, quare vis venti in velum, cum ventus velo perpendicularis est, sese habeat ad vim ejusdem venti in velum, quando illud inclinatum vento opponitur, ut quadratum radii ad quadratum sinûs anguli incidentiæ; aut, quod idem est, cur vires ejusdem venti in vela varia inclinatione ipsi obtensa, sint inter se in ratione quadratorum sinuum angulorum incidentiæ, quod demonstravi Articulis 7. 8. & 9. Cap. 1., & quod etiam hoc modo nunc demonstro. Probatum dedi in Theoria Manuariæ Nauticæ, Artic. 6. Cap. 1. corpus motum ab A in B non occurrere superficiei C D nisi secundum determinationem suam A V, ponendo scilicet A V perpendicularem ipsi D C productæ, & in illam superficiem nullam vim exserere nisi secundum hanc determinationem; quod agnoscit D^nus Hugenius. Hoc posito, ventus A B in velum non agit, nisi secundum hanc determinationem, id est, cum velocitate A V. Si velum C D vento A B perpendiculare esset, ventus in velum ageret velocitate A B; & per consequens ex principio quod statim adstruxi, vis cum qua ventus in velum ageret, si vento esset perpendiculare, est ad vim venti in velum D, quod inclinatè vento obtenditur, ut quadratum A B ad quadratum A V, id est, ut quadratum radii ad quadratum sinûs anguli incidentiæ.

Secunda applicatio inservit solvendæ quæstioni, de qua lis est inter D^num Hugenium & me, id est ostendit, quod, velo constituto in situ C D, & navi in situ B K, vis, qua ventus ope veli, navim secundum B G propellit, sit ad vim, qua idem ventus, ope ejusdem veli navim propellit secun-

dum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K, & non quemadmodum sustinet Hugenius, ut B G ad B K.

Quod ut pateat, concipiamus ventum in velum impingere cum velocitate B G; quoniam in illud impingit solummodo per motum, qui dirigitur secundum B G spectandus est ventus, tanquam latus ex B in G velocitate B G. sed quando illa velocitate fertur ex B in G, fertur velocitate B K secundum determinationem B K, & velocitate K G secundum determinationem K G; quare ex iis quæ superius a me dicta sunt, vis qua navis pellitur secundum B G est ad vim qua pellitur secundum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K; & ad vim, qua pellitur secundum K G, ut quadratum B G ad quadratum K G. Observandum autem est, eandem vim venti in velum, id est, vim totalem secundum B G, quam vim exprimit quadratum B G, divisam esse secundum B K, & K G, in duas partes, quarum summa vim totalem adæquat; & illa vis, potentia, seu motus, quibus tribus una eademque res significatur nominibus, nullum vel augmentum vel imminutionem accipit, ex nostris motum considerandi modis, qui motus non in sola corporum velocitate consistit, sed ex eorundem massis quoque constituitur. Ergo potentia, vis, seu motus, est productum quadrati celeritatis per massam. Quare potentia ex duabus aliis potentiis conflata, iis æqualis est, dummodo unius determinatio determinationi alterius sit perpendicularis, quia eo in casu duæ illæ potentiæ, nec quicquam addere, nec detrahere quicquam altera alteri, possunt, duabus determinationibus, uti diximus, nihil oppositi habentibus. Inde fit ut potentia secundum B K eadem manere possit, idemque per consequens illius effectus, licet in infinitum augeatur seu minuatur potentia secundum K G. Eo in casu sola potentia totalis B G mutationem patietur, quia semper æqualis erit summæ potentiarum, ex quibus producta fuerit.

Ex omnibus, quæ a me nunc dicta sunt, sequitur, navem H B M, si pellatur secundum B G ope veli D C, & si

ſi velocitas, quâ movetur ad latus, ſit ad velocitatem quâ directè progreditur, ut G K ad L K, ſequitur, inquam, navem juxta B L proceſſuram, & in L perventuram eodem tempore, quo perveniſſet in G, ſi ab omni parte aquas ſecaret eadem facilitate, quâ ſecat has à parte proræ; & ſi, quemadmodum poſuit Dnus Hugenius, navis fune B R infinite longo, & ipſi B K perpendiculari adſtringeretur, ad tollendum omnem motum ſecundum determinationem K G, ſequeretur etiam perventuram navim ad punctum K eodem tempore quo perveniſſet ad punctum G; quod erat in quæſtione, & quod erat demonſtrandum.

Si vera foret mechanices regula, quam memorat Dnus Hugenius, ſcilicet vim cum qua velum D C navim propellit ſecundum B K eſſe ad vim, cum qua idem velum navem ſecundum B G propellit, ut B K ad B G, non ſolum navis non perveniret in K eodem tempore, quo perveniſſet in G, poſitis circumſtantiis, de quibus ſupra, ſed & navis aquam æqualiter ab omni parte ſecans, & a velo D C, ſecundum B G ipſi perpendicularem propulſa, non ferretur juxta lineam BG: nam ex eadem mechanices regula, vis, qua ferretur navis juxta B K ope veli, foret ad vim qua ferretur ſecundum K G, ut B K ad K G, & velocitates navis eſſent inter ſe ut radices virium. Ergo velocitates quæ ex illis viribus orirentur, ſcilicet velocitas quam ſingulis momentis acquiſiviſſet navis in motu juxta B K, eſſet ad velocitatem quam iiſdem momentis haberet ex motu juxta K G, ut radix B K ad radicem K G. Sed ut navis moveatur ſecundum B G, quando inæquales ſunt velocitates inter ſe, quales hic a nobis ponuntur, requiritur, ut ſint inter ſe ſingulis momentis, ut B K ad K G, & non ut eorundem radices. Ergo navis non ferretur juxta B G, quod eſt abſurdum, nam cum vis totalis, quæ navem impellit, ſit juxta B G, ponendo navem ab omni parte æqualiter aquam ſecare, non poteſt non illam lineam ſequi.

Ita pergit Cl. Hugenius, *Error à me notatus in toto*

fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur theoremata, quæ de cætero elegantia videntur. Quale est inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, Carinæ situm, quo in adversum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati. Unde Auctor deducit &c.

Siquidem, quem errorem credidit Dnus Hugenius, errorem non esse ostenderim, intacta remanent tractatus mei theoremata.

Addit; *Cæterum, quin vera sit nostra regula non poterit dubitare Dnus Renaldus; cum per eam angulus gubernaculi, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem Cap. 7. determinavit. Quod certe ipsius inventum utilissimum est. Ponendo enim p = a, id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regula habetur x = $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$, quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.*

Et hic à Dno Hugenio dissentire cogor, & ab ipso meo consequenter tractatu, in quo error datur maximus, statim à me, detectâ prius ingenue ejusdem causâ, ostendendus. Composueram primo librum meum, pro vero ponendo principium falsum, à P. Pardies, art. 118. scientiæ virium motricium prolatum; præter quod nil continet de navis motu tractatus illius, & quod nec ipsum ulli rei applicatur; imo nullam auctor viam aperit solvendi vel unam, quæ spectat theoriam Manuariæ Nauticæ, propositionem. Cum jam sub prælo sudarent ultimæ libri I. paginæ; principii memorati falsitatem animadverti, & quoniam per omnes tractatûs propositiones dispersum, falsas reddebat resolutiones omnes, totam editionem suppressi. Solidiori postea fundamento nixus easdem denuo solvi, præloque subjeci, hæ sunt quæ in lucem sunt editæ. Sed aliis distentus negotiis, vocem *vis*, loco *velocitatis*, quæ erat substituenda, in demonstratione Art. 5. Cap. 2. incogitanter reliqui; quod Dnus Hugenius non attendit. Fateor me, in Art. 6. Cap. 1. promiscue vocibus *virium* & *velocitatum* uti, sed unius tantum corporis in vacuo motum ibi

ibi confidero, & in eo casu velocitas & vis eandem semper relationem habent. Capitis autem 7. errorem, post alteram tantum libri mei editionem animadverti, neque tunc illum corrigere per negotia mihi licuit. Falsitatem vero ita demonstro.

Centro B describatur circulus A D R E C, & repræsentet linea A B carinam navis, B R vero carinam productam. Supra B R, tanquam diametrum describatur semicirculus B G R, & similiter supra A B semicirculus A V B. Sit B D certus gubernaculi situs, & B C gubernaculum productum; B E perpendicularis supra A B; B G & A V perpendiculares supra D C; & G H perpendicularis ad B E. Ponendo alium gubernaculi situm, qualis est B *d* producta in *c*; ducantur in iisdem circumstantiis lineæ B *g*, A *u*, & *g h*. Si navis antrorsum moveatur secundum lineam B A, anguli A B C, & A B *c* æquales angulis G B E, & *g* B E, sunt anguli incidentiæ aquæ in gubernaculum. Unde sequitur, aquam, posito gubernaculo in situ B D, impingi secundum determinationem & cum velocitate A V, & per consequens cum vi, quam exprimit quadratum ipsius A V. Et quoniam velocitas navis sese habet tantum ut radix ipsius vis, propter aquæ resistentiam, propellitur navis secundum determinationem B G, velocitate quæ exprimitur per B G, quia B G est æqualis & parallela ipsi A V. Sed quando propellitur navis secundum B G velocitate B G, propellitur secundum B E velocitate B H. Si gubernaculum foret in alio situ B *d*, iisdem ratiociniis probaretur, navem pellendam fore secundum B E velocitate B *h*. Sed quando majori velocitate navis pellitur secundum B E, citius etiam convertitur. Quare si B G, quæ perpendicularis est ad gubernaculi situm, secet semicirculum B G R bifariam, id est, si angulus G B E, æqualis angulo incidentiæ A B C, sit 45. graduum, G H perpendicularis ipsi B E, erit tangens semicirculi. Ergo G H quæ exprimit celeritatem, quâ navis pellitur secundum B E, est omnium maxima. Nam si gubernaculum constituatur in alio situ, ut in B *d*, tunc B *g* ipsi perpendicularis, secabit

TAB. XXXIII. Fig. 7.

semicirculum in g, unde si ducatur perpendicularis $g\ h$, erit illa propior puncto B, quam ipsa G h, & navis pelletur secundum B E velocitate B h, quæ minor erit quam B H. Quare, ut navis citissime convertatur, necesse est ut *vectis* gubernaculi B C cum carinâ navis faciat angulum 45. graduum, non autem, sicut Cap. VII. Theoriæ dicitur, angulum graduum circiter 55.

Concludit Cl. Hugenius hisce verbis, *licet theoria hæc post indicatam à me correctionem difficilior evadat, quam in tractatu Dni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi posse, qua & navis & veli situs determinarentur, ut in adversum venti omnium maxime progrediatur, sed computatio nimium longa foret quare hanc nunc non aggredior.*

TAB. XXXIII. Fig. 1. In meo certe tractatu facillima foret determinatio sitûs navis velique, non tantum si in adversum venti omnium maxime sit progrediendum, sed & conveniens cuicunque viæ instituendæ, si deviatio navis à calculo secluderetur; quod ut pateat, sit linea venti A B, & sit data via B K, cum vento constituens angulum quemcunque A B K. Ut inveniatur, quo veli situ, navis illâ viâ citissime possit progredi, si scilicet nulla sit deviatio; sumatur B R tanquam diameter, & centro M describatur semicirculus B G V; ab eodem puncto M ducatur M G viæ B K parallela; a puncto B ad punctum G ducatur B G, & tandem ducatur D B C perpendicularis ipsi B G. Dico D C repræsentare veli situm, quo per viam B K navis omnium citissime possit progredi. Ad id probandum, ducatur G K perpendicularis ipsi B K. Ex omnibus quæ superius dicta sunt, patet ventum A B propellere navem ope veli D C, secundum B G velocitate B G, eodem tempore quo eandem propelleret secundum B K velocitate B K. Et quoniam G K est perpendicularis ipsi B K, erit itidem perpendicularis ipsi M G. Ergo G K est tangens semicirculi. Ergo quotcunque ducantur perpendiculares ex aliis circumferentiæ semicirculi punctis, supra B K, cadent omnes inter B & K. Ergo navis celeritas in veli situ D C erit omnium maxima. Addo, velum D C secare bifariam an-

angulum A B K, qui est angulus venti cum viâ. Ad quod demonstrandum ducatur M N perpendicularis ipsi B G. secat M N angulum B M G angulo A B K æqualem, bifariam; & quoniam M N est parallela ipsi D C, angulus B M N dimidius anguli B M G, qui æqualis est angulo A B K, æqualis est angulo A B C, qui ipse per consequens æqualis est dimidio angulo A B K. Unde sequitur, veli situm semper bifariam debere secare angulum venti & viæ, & cum agitur de progrediendo in adversum venti, debere illum cum velo constituere angulum 30. graduum, proramque itidem cum velo angulum 30. grad.; quia, ut demonstratum fuit in Theoria Manuariæ Nauticæ, quocunque in situ respectu venti disponatur velum, necesse est ut ejus complementum prora bifariam secet. Et exinde apparet, quocunque in situ constituatur prora, quæ semper cum via congruit; quia ponitur navem non deviare, necesse esse ut angulum quem cum prora, ventus constituit, velum bifariam secet. Unde sequitur angulum rectum debere à prora & velo in tres partes æquales secari, id est, ventum cum velo 30. gradus constituere, proram itidem cum velo 30. gradus, & cum vento per consequens 60.

XII.

Exceptio Dni Hugenii ad Responsum Dni Renaldi.

Mihi evidens videbatur illud quod in observationibus de errore primario, qui reperitur in tractatu de manuaria nautica Dni Renaldi, proposueram, & censuerunt viri in re Mathematicâ versatissimi, argumentum meum omni exceptione majus esse; idcirco neque credideram, velle ipsum quidpiam respondere, quo suam confirmaret Theoriam; interim ex iis, quæ in lucem edidit, apparet eum minime de suo errore mecum sentire; & quandoquidem rationibus utitur, e quibus haud ita facile se expedire possent illi, qui non satis hæcce omnia excusserunt, obstrictum me credidi ad demonstrandum ma-

majori evidentiâ, quam antea, ejus Theoriam sustineri non posse, nisi principia mechanices, jam dudum stabilita, quorumque veritatem negare nec auderet, nec vellet, evertantur.

Ne inutiliter protraham controversiam nostram respondendo argumentis quæ Dus Renaldus mihi objicit, ostendam tantum illum, ut jam observaram, errasse in propositione, qua nititur tota ejus Theoria, deinde paucis indicabo, quid huic errori ansam dederit.

TAB. XXXIII. Fig. 9.

Ut ostendam, quinam sit quæstionis status, hic maximam partem eorum, quæ nostras figuras spectant, repeto, scil; H M est navis carina; C D velum; A B linea venti velum inflantis; B G est perpendicularis ad C D; G K perpendicularis ad B K, quæ indicat carinam prolongatam; continuo G B ad Z, & M H ad X.

Dus Renaldus in Theoria cap. II. Art. 1. dicit, si ponatur navem undique eâdem, qua puppis, facilitate aquam findere, illam ita a vento propelli, ut progressura sit per rectam B G, quod est verum; sed si juxta situm carinæ navis tantum progredi queat in recta B K, vel si funis B R perpendicularis ad B K, & cujus longitudo censetur infinita, eam cogat insistere in via B K, contendit, velo & vento iisdem ac antea manentibus, navem percursuram spatium B K, eodem tempore quo percurrisset B G; ego autem defendo, quod percurreret spatium B S, medium proportionale inter B K & B G; Et hic est controversiæ nostræ status.

In probatione, quam affert in responsione suâ, loco venti A B oblique cadentis in velum C D, substituit ventum Z B, qui in id perpendiculariter agit; quod potest, & minime controversiam mutat, quum certum sit, quod quocunque sensu ventus in velum C D cadat, conetur navem propellere per viam B G perpendicularem ad C D; neque ullius usus sunt, quas habet D. Renaldus, diversas considerationes de motu venti. Ratiocinando dein invenit, quod vis, quâ navis pellitur a vento secundum B G ope veli, sit ad vim, qua pellitur ab eodem vento ope ejusdem veli secundum B K,

ut

ut quadratum B G ad quadratum B K, non vero ut B G ad B K, quod ego contendo, & inde tota res pendet.

Ut determinemus cujus sententia vera sit, concipiamus planum, in quo nostra figura existit, ita ad Horizontem erectum, ut linea B G ad eundem sit perpendicularis, & sit R B X funis affixus in R, ad quem in B alligatum & suspensum sit pondus Q: Ponamus ulterius portionem B X perpendicularem ad R B a manu retineri in X; clarum est, id exacte repræsentare casum navis, de quo est quæstio; nam loco venti, qui impingendo in velum C D propellat navim secundum B G, hic habemus pondus Q, quod trahit punctum B juxta B G; & funis B R, qui censetur infinitæ longitudinis, & impedit, quo minus navis aliam plagam versus, quam B K possit progredi, hic eundem edit effectum respectu nodi B.

Ut ergo vis, qua ventus propellit navem secundum B G, est ad vim, qua hanc propellit secundum B K, ita est pondus Q ad gravitatem, quæ agit in manum quæ in X cohibet, quò minus nodus B moveatur versus B K; illa enim gravitas æquipollet vi, qua nodus secundum B K trahitur. Cum autem G K parallela sit ipsi B R, certum est ex notissimis Mechanicæ regulis, quod pondus Q sit ad id quod retinet chordam B X, vel ad gravitatem quæ in X agit in manum ut B G ad B K. Vis ergo, qua navim propellit ventus secundum B G, est ad vim, qua propulsa est versus B K, ut B G ad B K non vero, ut illarum linearum quadrata, ut Dnus Renaldus contendit.

Ponamus porro, navem H M, quæ undas eadem undique facilitate secat, propelli per ventum Z B vel A B (perinde enim est) quo naviget certo tempore per B G, velo existente in C D, & determinandum esse, quantum progressura sit secundum B K æquali tempore eodem vento, eodemque veli situ. Cum celeritates navis in duabus illis viis tales debeant esse, ut resistentiæ, quas infert ipsi aqua, sint ut vires, quibus propellitur (nam in eo casu solo motu æquabili progreditur), & cum resistentiæ

sint ut quadrata celeritatum, ideo requiritur ut quadrata celeritatum sint ut vires, id est ut G B ad B K; & consequenter ut velocitates sint ut G B ad B S; quandoquidem quadrata G B & B S sunt ut lineæ G B, B K per constructionem. Probavi ergo ex ordinariis Mechanices principiis, id, quod in observatione mea proposueram.

Superfluum foret alia argumenta D^ni Renaldi examinare, quibus vult hanc eandem, quam refutavi propositionem, confirmare; solummodo indicabo originem erroris, qui in iis occurrit, præsertim nasci ex eo, quod in Articulo 7. Cap. 1. Theoriæ suæ concludat, *vires relativas materiæ fluidæ ad superficies diversimode inclinatas esse inter se, ut quadrata sinuum angulorum incidentiæ;* debuisset addere *ad superficies æquales diversimode inclinatas;* cujus vocis *æquales* paulo ante in eodem Articulo pag. 7. quoque non meminerat; quod si suppleatur, tum demonstratio optime congruit cum conclusione cumque veris principiis P. Pardies in Art. 118. Tractatus de *Viribus moventibus*. Patet hic tantum in eodem illo Articulo deceptus fuit, quod ignorarit vel saltem non recordatus fuerit, resistentias aquæ in corpus esse ut quadrata velocitatum ejus corporis; ideo enim p. 225. facit *a f ad a u in duplicatâ ratione b o ad m p* cum simpliciter facere debuerit *a f ad a u, ut b o ad m p.*

Quod attinet ad utilissimum Gubernaculi situm, D^nus Renaldus se ipsum nullo jure culpat, & dum quæ primo determinaverat corrigere conatur, male ratiocinatur; in responsione p. 303, nam tantum determinandum est, in quonam Gubernaculi situ aqua id propulsura sit maximâ vi, juxta perpendicularem ad carinam; unde necessario sequetur maxima puppis velocitas juxta illam perpendicularem. Errat etiam, quum vult, p. 25 Theoriæ suæ de Manuaria Nautica, legi *velocitas* loco *vis.*

Quod superest, observo, totam hanc Theoriam, ut ediderat, veram fore si resistentiæ aquæ essent ut velocitates navis, sunt autem ut quadrata illarum velocitatum.

F I N I S.

